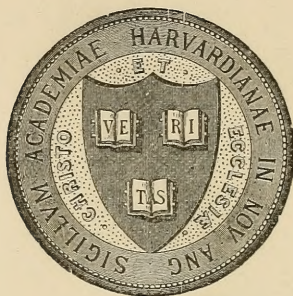




HARVARD UNIVERSITY.



LIBRARY

OF THE

MUSEUM OF COMPARATIVE ZOÖLOGY.

7026.

Bought

June 25, 1903 - Mar. 4, 1904.

ARCHIV

FOR

MATHEMATIK OG NATURVIDENSKAB

UDGIVET

AF

AMUND HELLAND

G. O. SARS

S. TORUP

FEM OG TYVENDE BIND.



A KRISTIANIA

ALB. CAMMERMEYERS FORLAG

1903

2001.

Indhold.

No. 1.	Ivar Bang: Studier over Nucleoproteider	Side 1—96
a » 2.	R. Collett: Om tre for Norges Fauna nye Fiske	» 1—26
» 3.	Axel Thue: Mindre matematiske meddelelser. III	» 1—63
» 4.	P. A. Øyen: Høidemaalinger i Jotunheimen Sommeren 1902	» 1—28
» 5.	P. A. Øyen: Meteorologiske Iagttagelser i Jotunheimen Sommeren 1902	» 1—10
» 6.	Dr. Elisabeth Stephansen: Von der Bewegung eines Continuums mit einem Ruhepunkte	» 1—30
» 7.	Andreas Holmsen: Dybden af Øieren	» 1—14
» 8.	G. O. Sars: Fresh-Water Entomostraca from China and Sumatra	» 1—44
a » 9.	Embr. Strand: Neue norwegische Schmetterlingsformen	» 1—24
» 10.	Axel Thue: Et par theoremer om legemers opstykning i de samme dele	» 1—39
» 11.	Alf Guldberg: Sur certaines équations aux différences	» 1—11

Generalregister (Forfatterregister—Sagregister) Bind I—XXV.

7026

ARCHIV
FOR
MATHEMATIK OG NATURVIDENSKAB

UDGIVET

AF

AMUND HELLAND G. O. SARS S. TORUP

FEM OG TYVENDE BIND. FØRSTE OG ANDET HEFTE



KRISTIANIA
ALB. CAMMERMEYERS FORLAG

1903

Al Korrespondance og Forsendelser vedrørende «Archiv for Mathematik og Naturvidenskab» bedes adresseret til Professor Dr. TORUP, Universitetets fysiologiske Institut, Christiania.

Pour tout ce qui concerne la rédaction et l'administration des «Archiv for Mathematik og Naturvidenskab» s'adresser à M. SOPHUS TORUP, professeur à la Faculté de Médecine. L'Institut Physiologique de l'Université, Christiania, Norvège.

STUDIER
OVER
NUCLEOPROTEÏDER

AF
IVAR BANG.



ALB. CAMMERMEYERS FORLAG

Morten Johansens Bogtrykkeri. — Kristiania 1902.

Studier over nucleoproteïder.

Af

Ivar Bang.

I. Om nucleoproteïderne i thymus.

Det kemiske studium af glandula thymus har i flere henseender en ikke ringe interesse. For det første foreligger her et udgangsmateriale, der i det store taget kan betragtes som bestaaende af overveiende ensartede celler. Studiet af thymus maa derfor kunne give os væsentlige oplysninger om *cellens* kemiske sammensætning. Et lignende, ligesaa ukompliceret udgangsmateriale kan man vanskelig skaffe fra andre steder i organismen uden meget stort besvær.

For det andet har det vist sig, at de kemiske individer, der kan fremstilles fra thymus, har krav paa stor interesse fra et fysiologisk standpunkt. Jeg vil blot erindre om, at det eiendommelige æggehvidelegeme, der benævnes histon, kun findes i thymus samt i det umodne sperma fra fiske og i de røde kjærneholdige blodlegemer fra fugle, (jeg bortser her fra globinet). Desuden findes histonet bundet paa en lignende maade i thymus, som protaminet, der staar histonet ganske nær i kemisk henseende, findes bundet i det modne fiskesperma.

For det tredje har studiet af thymuscellerne sin store betydning for hæmatologien. Flere forskere, som f. ex. *Lilienfeld*, gaar simpelthen ud fra, at thymuscellerne er veritable *leucocyter*. Hvis det er saaledes, hvad man ikke ubetinget tør acceptere, er jo betydningen af studiet af thymus indlysende. Men selv om disse celleformer ikke kan ansees for identiske, saa staar de ialfald hinanden meget nær. Efter *Lilienfelds* undersøgelser, som dog maaske maa optages med kritik, har han fra leucocyterne i blodet og lymfækjertlerne isoleret de samme substanser som fra thymus.

Endelig frembyder studiet af thymus en særlig interesse derved, at de forskellige forskeres opfatning angaaende den kemiske sammensætning staar ganske skarpt overfor hinanden. Det maa derfor siges at have sin betydning, hvis man kan bringe klarhed i denne strid. De undersøgelser, som her skal refereres, tilstræber dette.

Førend jeg imidlertid gaar ind paa omtalen af mine endnu ikke publicerede undersøgelser, vil det være hensigtsmæssigt at give et kort overblik over de foregaaende arbejder for derved at kunne præcisere de problemer, som foreligger til afgjørelse.

Bortser man fra enkelte spredte notiser over vort thema hos ældre forskere, finder man det første indgaaende studium over thymuskjertelens sammensætning hos *Lilienfeld*.¹ Disse *Lilienfelds* undersøgelser anser jeg saa almindelig bekjendt, at jeg blot kortelig skal nævne hans resultater. Som det vigtigste af disse skal nævnes, at han fandt cellernes hovedbestanddel at være et eiendommeligt sammensat æggehvidestof, nucleohistonet, der lod sig spalte i

¹ Zeitschr. f. physiol. Chemie. Bd. 18, pg. 472.

to komponenter. Den ene komponent var histonet, den anden et nucleïn, leuconucleïnet, der igjen lod sig sønderdele i æggehvide og nucleïnsyre. Desuden fandtes der i thymus et andet nucleoproteïd, der var uopløselig i vand, men som lod sig extrahere med 10 % kogsaltopløsning. Endelig fandtes smaa mængder globulin og albumin samt endel substanser, der lod sig extrahere med alkohol (protagon?).

Lilienfelds anskuelse har indtil den sidste tid været eneraadende. I aaret 1900 fremkom dog flere arbeider, der mere eller mindre hævdede en anden anskuelse.

Det første af disse offentliggjordes af nærværende *forfatter*.¹ Efter en mere foreløbig undersøgelse kom jeg til den opfatning, at *Lilienfelds* nucleohiston ikke var noget ensartet legeme, men det bestod af en blanding af flere substanser. Den ene af disse var et i vand opløseligt nucleoproteïd, der ikke indeholdt noget histon. Dette nucleoproteïd lod sig extrahere af thymus med 0,8 % kogsaltopløsning. Desuden indeholdt vandextraktet fra thymus histon og nucleïnsyre. Ved mætning af vædsken med kogsalt faldt histonet ud, og i filtratet kunde man med alkohol fælde nucleïnsyren. Da jeg ansaa kogsaltmætningen for en altfor lidet indgribende proces til at spalte en eventuel forbindelse mellem de to nysnævnte legemer, sluttede jeg, at hver af dem forekom isoleret i vandextraktet, histonet i forbindelse med saltsyre, nucleïnsyren med alkali. Imod disse mine iagttagelser opponerede *Kossel*,² der fastholdt *Lilienfelds* anskuelse, og som bl. a. fremholdt, at kogsaltbehandlingen maatte ansees som en saavidt indgribende

¹ Zeitschr. f. physiol. Chemie. Bd. 30, pg. 508.

² Ibid. Bd. 30, pg. 520.

proces, at den meget vel kunde spalte en forbindelse, som *Kossel* da antog var nucleohiston. *Kossels* kritik foranledigede atter en modkritik fra min side.¹

Imidlertid var der under denne polemik offentliggjort to nye arbejder over samme emne: ét af *Huiskamp* og ét af *Malengreau*. Den ene af disse forskere, *Huiskamp*² nemlig, konstaterer rigtigheden af min fremstilling forsaavidt, at han anser *Lilienfelds* nucleohiston for en blanding af to substanser, hvoraf den ene er et nucleoproteid, der i sine reaktioner stemmer overens med det af mig beskrevne. Det indeholdt saaledes intet histon. Men hermed ophører overensstemmelsen. *Huiskamps* undersøgelser af den anden substans, der indgik i *Lilienfelds* nucleohiston, viste, at denne substans var det egentlige nucleohiston, der i og for sig gav de reaktioner og indeholdt de komponenter — histon og leucoproteid — som *Lilienfeld* havde beskrevet. Dette nucleohiston udmerkede sig fremdeles derved, at det gav endog kvantitative fældninger med smaa mængder metalsalte, hvilke fældninger for de lette metaller vedkommende var opløselig i overskud paa fældningsmidlet samt i fortyndet alkali. Denne egenskab benytter *Huiskamp* til fremstilling af sit nucleohiston, idet han fælder vandextraktet fra thymus med 0,1 % CaCl_2 , opløser fældningen i fortyndet NH_3 og fælder paanyt med CaCl_2 . I filtratet fra kalkfældningen fremstilles nucleoproteidet ved udfældning med fortyndet eddikesyre.

Det andet arbejde, der fremkom, offentliggjordes af *Malengreau*.³ *Malengreau* fælder først vandextrakt med

¹ Zeitschr. f. physiol. Chemie. Bd. 31, pg. 407.

² Ibid. Bd. 32, pg. 145.

³ La cellule. Bd. 17, pg. 339.

eddikesyre, opløser fældningen i fortyndet alkali og fremstiller sine substanser ved fraktioneret fældning med mættet ammoniumsulphatopløsning. Ved halvmætning med ammoniumsulphat udfældes en substans, der betegnedes som nuclealbumin *a*, medens en anden substans *b* udfældtes ved $\frac{3}{4}$ mætning. Navnet nuclealbumin er misvisende, da begge substanser indeholdt phosphor og xanthinbaser. Phosphorgehalten var i *a* 0,5 % og i *b* 4,5 %. Det merkelige var, at begge substanser indeholdt *histon*. Disse histoner var desuden indbyrdes forskellige, idet deres fældningsgrænser for ammoniumsulphat faldt sammen med de respektive nuclealbuminers, hvorfra de stammede. Forresten angiver *Malengreau* intet nærmere om sine substansers kemiske natur.

Som man ser, er spørgsmaalet blevet næsten mere udviklet end før, idet enhver af de tre forfattere hævder sin specielle opfatning. Alle tre er enig om, at *Lilienfelds* nucleohiston er forurenset med et andet nucleoproteïd, men hermed ophører ogsaa overensstemmelsen. *Malengreau* hævder, at dette nucleoproteïd er et nucleohiston, medens *Huiskamp* og jeg ikke har fundet noget histon heri. *Huiskamp* og *Malengreau* hævder videre det egentlige nucleohistons eksistens, hvad jeg benægtede.

Ved at gjentage *Huiskamps* undersøgelser kom jeg til resultater, der i hvert fald delvis forklarede modsætningerne mellem os. Det viste sig nemlig ved disse foreløbige undersøgelser, at *Huiskamps* nucleohiston ikke var noget nucleohiston men en forbindelse af en nucleïnsyre med histon, altsaa nucleïnsurt histon. *Huiskamps* afvigende opfatning skyldtes den omstændighed, at han ikke havde rensat sin substans tilstrækkelig. Jeg maatte saaledes opgive min

tidligere opfatning: at histonet og nucleïnsyren forekom som uafhængige legemer i vandextraktet. Det viste sig fremdeles, at man ved at mætte en opløsning af det nucleïnsure histon med kogsalt kunde spalte forbindelsen i saltsurt histon og nucleïnsurt alkali. Kogsaltet dekomponerede saaledes forbindelsen. Fremstillingsmaaden for det nucleïnsure histon afveg fra *Huiskamps* derved, at jeg opløste CaCl_2 -fældningen i kogsalt af ca. 5 % istedenfor i ammoniak og dialyserede opløsningen til forbindelsen atter udfældtes.

Et senere arbejde af *Huiskamp*¹ beskæftiger sig ikke med spørgsmaalet om nucleohistonets sammensætning, men omhandler elektrolytiske forhold af nucleohistonets salte. *Huiskamp* viser, at nucleohistonet forekommer i vandextraktet som natriumsalt, samt at dette natrium kan erstattes af andre metaller samt af histon. Fremdeles bestemmer han ved nogle analyser den procentiske mængde nucleïn og histon i nucleohistonet. Histongehalten var 40 %, nucleïnets mængde 60 %. Afhandlingens øvrige, interessante indhold berører mindre vort problem og refereres derfor ikke her.

Det sidste arbejde, der er publiceret, hidrører fra *Malengreau*.² *Malengreau* polemiserer her mod den opfatning, der er fremholdt af *Huiskamp* og mig, at nucleoproteidet ikke indeholder histon, og leverer yderligere beviser herfor. Han viser saaledes, at man ved at behandle eddikesyrefældningen af vandextraktet (*Lilienfelds* oprindelige nucleohiston) med fortyndet saltsyre, faar en opløsning, der indeholder *begge* histoner, hvilke kan fremstilles ved fraktioneret fældning med ammoniumsulphat. Fremdeles viser

¹ Zeitschr. f. physiol. Chemie. Bd. 34, pg. 32.

² La Cellule 1901. Pg. 285.

Malengreau, at hans *b*-nucleoalbumin forholder sig, som det af mig tidligere beskrevne nucleïnsure histon, idet man ved mætning af en opløsning med kogsalt fuldstændig kan spalte forbindelsen i histon (*b*) og nucleïnsyre, og er fri for æggehvite.

Som sagerne nu staar, har saaledes spørgsmaalene forenklet sig, idet man vel tør gaa ud fra, at min opfatning angaaende det egentlige nucleohiston er almindelig accepteret. Selve substansen — det nucleïnsure histon — er imidlertid saare ufuldstændig studeret. En af de foreliggende opgaver er saaledes at levere en indgaaende undersøgelse af dette legeme.

Den næste opgave maa blive et nøiagtigt studium af nucleoproteïdet specielt med hensyn til det eventuelle histon.

Idet jeg ved mine undersøgelser satte mig disse opgaver som maal, ansaa jeg det som min første opgave at undersøge, om der, som *Malengreau* mener, findes *to* histoner i thymus eller blot *ét* saadant. Hvis det sidste er tilfældet, vilde nemlig den senere undersøgelse af nucleoproteïdet blive betydelig forenklet.

A. Indeholder saltsyreextractet fra thymus selv eller Lilienfelds nucleohiston ét eller flere forskellige histoner?

Ved mine tidligere undersøgelser over thymushiston¹ var jeg a priori gaaet ud fra, at det histon, der forelaa, var en ensartet substans. *Lilienfelds* fremstilling m. h. t. nucleohistonet og dettes sammensætning var den eneste foreliggende, og jeg betvilede ikke rigtigheden af hans opfatning. Alle de reaktioner, jeg anstillede paa histonet, syntes ogsaa med bestemthed at tale for histonet som et enkelt stof. Ganske vist gav de forskellige fældningsreaktioner, jeg anstillede, som kogningsprøven, alkaloidprøven etc., ikke et fuldstændigt kvantitativt udbytte, men den rest af substans, der blev tilbage i opløsningen, var for det første forsvindende liden og gav for det andet de almindelige reaktioner, naar man fremstillede en mere koncentreret opløsning deraf.

Nogen fraktioneret fældning med neutralsalte blev ikke foretaget af mig. Ved hjælp af en saadan fraktioneret fældning med ammoniumsulphat mener *Malengreau* nu at have paavist to histoner. Der foreligger dog ingen analyser og blot sparsomme antydninger over deres forskellige reaktioner.

Jeg vil da heller ikke benægte, at det var med en vis forudfattet tvil, at jeg gik til undersøgelsen af disse to histoner.

Allerede en orienterende undersøgelse bragte mig dog paa andre tanker.

¹ Zeitschr. f. physiol. Chemie. Bd. 27, pg. 468.

Der anvendtes til denne undersøgelse en mindre mængde substans (eddikesyre-fældning af vandextrakt af thymus), der ekstraheredes 24 timer med 0,8 % HCl. Filtratet dialyseredes og fældtes med NH_3 . Fældningen opløstes i 50 ccm. 0,05 % HCl og dialyseredes til neutral reaktion. Derpaa udførtes fraktionsforsøg med mættet ammoniumsulphatopløsning.

- 1) 1 ccm. opløsning + 7 ccm. vand + 2 ccm. mættet Am_2SO_4 -opl.: klar opløsning.
- 2) 1 ccm. opløsning + 6 ccm. vand + 3 ccm. mættet Am_2SO_4 -opl.: begyndende opalescens.
- 3) 1 ccm. opløsning + 5 ccm. vand + 4 ccm. mættet Am_2SO_4 -opl.: fældning.
- 4) 1 ccm. opløsning + 4 ccm. vand + 5 ccm. mættet Am_2SO_4 -opl.: fældning.

No. 2 og no. 3 gav i filtratet efterfældning ved tilsætning af 1 ccm. Am_2SO_4 -opløsning. No. 4 forblev ved samme tilsætning klar, men gav ikke desto mindre en vakker biuretreaktion samt yderligere fældning ved mætning med Am_2SO_4 i substans. Ved nøiagtigere undersøgelse viste det sig, at øvre og nedre fældningsgrænse for den udfældte substans laa mellem 23 % og 33 % ammoniumsulphatopløsning. Hovedopløsningen tilsattes derfor ammoniumsulphatopløsning til 43 %, hvorved efter *Malengreau* *a*-histonet fuldstændig udfældes, bundfaldet filtreredes fra, og der udførtes derpaa fraktionsforsøg i filtratet for at bestemme fældningsgrænserne for et eventuelt foreliggende histon *b*. Det viste sig da, at der ved tilsætning af Am_2SO_4 -opløsning til 70 % begyndte at opstaa en ny fældning, der først ved 90 % Am_2SO_4 -opløsning i vædsken var fuldstændig udfældt. Fældningsgrænserne laa saaledes i dette tilfælde betydeligt

høiere end, hvad *Malengreau* angiver for *b*-histonet. Hovedportionen af filtratet mættedes derpaa med Am_2SO_4 , og fældningen frafiltreredes. Den oprindelige opløsning var saaledes opdelt i to fraktioner, en fraktion, der fremkom ved tilsætning af 43 % ammoniumsulphatopløsning (*a*) og en der opstod ved mætning af filtratet herfra med ammoniumsulphat (*b*). Begge opløstes i vand til opløsning *a* og *b*, der skulde indeholde de respektive histoner. Opløsningen *a* gav samtlige histonreaktioner. Ved ophedning af salpetersyreprøven indtraadte ikke fuldstændig opklaring af vædsken, hvad der heller ikke senere er lykkedes mig for *a*-histonets vedkommende. Videre skal nævnes, at *Millons* vædske ikke gav nogen fældning, men at man ved kogning fik en vakker rødfarvet vædske. Fremdeles lod substansen sig fuldstændig udsalte ved tilsætning af ammoniumsulphatopløsning til ca. 40—43 %. Det var saaledes utvilsomt, at her forelaa et histon, der i sine egenskaber stemte overens med *Malengreaus* *a*-histon.

Opløsningen *b* gav ligeledes histonreaktioner nemlig: NH_3 -reaktionen og fældning for NaOH . Man kunde tilsætte forsigtig NH_3 og NaOH til svag alkalisk reaktion, før fældning indtraadte — i dette tilfælde ca. 0,1 % NH_3 og 0,05 % NaOH . Senere undersøgelser har vist, at den mængde alkali, der saaledes kan tilsættes, før fældning opstaar, varierer efter histonopløsningens koncentration. En meget koncentreret histonopløsning taaler saaledes forholdsvis betydelige mængder alkali, — der er observeret indtil 1 % NaOH , — førend fældning indtræder. Fældningen er opløselig i overskud paa fældningsmidlet, — er opløsningen meget koncentreret, indtræder dette først, naar vædsken indeholder flere procent frit alkali. I modsætning

hertil er *a*-histonet saavel lettere opløselig som lettere fældbar for alkali. Salpetersyre gav *ingen* fældning, hvorimod kogningsprøven var positiv. Æggeghvidereaktionen gav positiv udslag, men alkaloidreaktionen absolut negativ. Dette sidste forhold har voldt mig meget besvær, førend det lykkedes at forklare sagen. Det viste sig nemlig, at der fra mætningen med ammoniumsulphat var slæbt noget af dette salt med i den paafølgende opløsning og at ammoniumsulphat selv i smaa mængder hindrede alkaloidreaktionens fremkomst. Ved de senere fremstillinger af *b*-histonet har jeg derfor faaet alkaloidreaktionen, som jeg anser for en af de vigtigste histonreaktioner, smukt frem, naar jeg enten dialyserede min opløsning eller udfældte substansen med kogsalt og opløste fældningen i vand. Nærværelsen af kogsalt har nemlig *ikke* den samme hindrende virkning paa reaktionen som Am_2SO_4 . Disse opløsninger forholdt sig derimod negative overfor alkaloidreaktionen, hvis man til ca. 5 cc. tilsatte 1 à 2 draaber mættet Am_2SO_4 -opløsning og derefter reagenset, og et par draaber Am_2SO_4 -opløsning opløste en allerede indtraadt fældning. Fældningsgrænserne for substansen laa ved fraktionering af opløsningen *b* mellem 70 % og 90 % ammoniumsulphatopløsning i vædsken.

Det var saaledes efter dette foreløbige forsøg med stor sandsynlighed godtgjort, at et saltsyreextrakt paa det saakaldte *Lilienfeldske* nucleohiston indeholdt 2 histoner, hvoraf *a*-histonet gav alle 5 af mig opstillede histonreaktioner, medens *b*-histonet ikke gav salpetersyrereaktionen, men derimod de øvrige 4.

Jeg gik derpaa over til et nøiagtigere studium af disse histoner og tog i det øiemed 3 kg. thymus i arbeide,

1 kg. til hvert forsøg. Da fremstillingsmetoderne for histonerne var forskjellig i hvert enkelt forsøg, skal jeg kortelig omtale hvert forsøg for sig.

Forsøg no. 1. Efter maling i kjødkværn slammedes thymuskjertlerne op i 1,5 l. 0,8 % HCl og henstod dermed 48 timer, hvorpaa vædsken filtreredes. Filtratet fældtes med NH_3 i overskud, og fældningen opløstes i fortyndet saltsyre og fældtes atter ud med NaOH. Ved tilsætning af vand og nogle draaber saltsyre opløstes denne sidste fældning — efter udvaskning med vand paa filtrum — til en neutralt reagerende vædske. Opløsningen udgjorde 200 ccm. Denne tilsattes det lige volum mættet Am_2SO_4 -opløsning, hvorved der opstod en ganske rigelig fældning *a*. Filtratet gav ved mætning med Am_2SO_4 en mindre efterfældning *b*. Begge fældninger opløstes i vand og dialyseredes, *a* til en opalescerende, *b* til en klar vædske. Af *a* udtoges derpaa smaaprøver til bestemmelse af fraktionsgrænserne. Ved tilsætning af Am_2SO_4 -opløsning til 20¹ fik man første fraktion udfældt, filtratet herfra gav atter fældning, der var fuldstændig ved 37, og endelig fik man en tredie efterfældning ved ca. 60.

Hovedportionen af *a* tilsattes derpaa Am_2SO_4 -opløsning til 20, hvorved der opstod et ikke ubetydeligt bundfald. Dette bundfald viste sig ved nærmere undersøgelse *ikke* at bestaa af histon. Vi vil senere lære substansen nærmere at kjende. Derpaa tilsattes i filtratet fra denne fældning Am_2SO_4 til 37. Herved opstod der dog ingen fældning,

¹ I det følgende vil under omtalen af fraktionsgrænserne disse betegnes alene med tal, svarende til det antal ccm. mættet Am_2SO_4 -opløsning, der tilsættes. Ved tallet 25 forstaaes saaledes, naar der tales om fraktionering, 25 % mættet Am_2SO_4 -opløsning. Anvendes andre neutralsaltoplosninger til fraktionering, blir disses navn altid tilfoiet.

men blot en opalescens. Først ved 42 fik man paanyt en rigelig fældning. I filtratet fra denne fældning fik man først ved 60 atter opalescens og ved yderligere tilsætning atter en tredje, sparsom fældning — aabenbart spor af *b*-histonet, der var slæbt med i fældningen ved halvmætning. Af den fraktion, der faldt ud mellem 37 og 42, tilberedtes atter med vand en koncentreret opløsning. Dens nedre fældningsgrænse rykkede da ned til 30, og den øvre forblev ved 42. Opløsningen gav samtlige histonreaktioner, en vakker biuretreaktion og ved kogning med 1—2 draaber af *Millons* reagens en vakker rød vædske. Ved mætning med kogsalt og magnesiumsulphat udfældtes substansen kvantitativt af sin opløsning. *a*-histonets existens var hermed yderligere sandsynliggjort. Opløsningen fældtes sluttelig med NaOH, bundfaldet udvaskedes med vand, alkohol og æther. Præparatet indeholdt 17,86 pct. N beregnet paa askefri substans. *b*-fraktionen viste sig ved fraktionsforsøg paa mindre prøver at indeholde endog betydelige mængder *a*-histon, der ikke var udfældt ved $\frac{1}{2}$ mætningen, idet der ved 30 opstod opalescens, der ved yderligere tilsætning steg til fældning (øverste fraktionsgrænse 42). Ved 65 opstod paanyt fældning i filtratet herfra. Hovedopløsningen fældtes derfor atter med Am_2SO_4 -opløsning til 42, og i filtratet udfældtes *b*-histonet ved mætning med Am_2SO_4 . Denne sidste fældning opløstes atter i vand og var nu fri for *a*-histon, idet dens nederste fældningsgrænse var 65. Opløsningen gav alle histonreaktioner undtagen salpetersyreprøven. (Alkaloidreagensprøven gav dog først positiv udfald efter fjernelse af Am_2SO_4). *b*-histonets existens, som et i sine reaktioner fra *a*-histonet forskjelligt legeme, var hermed verificeret.

Opløsningen tilsattes derpaa NaOH til udfældning af *b*-histonet, der udvaskedes med vand, alkohol og æther. Præparatets ringe mængde tillod dog ingen selvstændig analyse, hvorfor dette præparat undersøgtes sammen med det følgende.

Forsøg no. 2. Medens i det foregaaende forsøg histonerne blev fremstillet ved fraktionering med Am_2SO_4 -opløsning, blev der i dette forsøg anvendt et andet neutral-salt, nemlig mættet kogsaltopløsning. Dette skeede af den grund, at jeg anser fraktioneringsforholdene til et salt alene for utilstrækkelig til karakterisering af vedkommende substanser. Jeg maa i saa henseende tage afstand fra den opfatning, der gjøres gjældende af den *Hofmeister'ske* skole. En desto større opfordring til at variere forsøgene i saa henseende synes mig den omstændighed at være, at fældningsgrænserne for Am_2SO_4 -opløsning i foregaaende forsøg ikke viste sig saa absolut konstante, som ønskeligt var, men at de veksler noget efter opløsningens koncentration. Ganske illustrerende i saa maade er de fraktionsforsøg, som udførtes paa smaaprøver under det forsøg, der nu skal omtales: 1 kg. thymus maledes og opslam-medes i 1,5 l. 0,8 % HCl, hvormed det henstod 24 timer. Derpaa filtreredes. En prøve af filtratet neutraliseredes og fraktioneredes med mættet Am_2SO_4 -opløsning. *a*-histo-nets fældningsgrænser laa mellem 42 og 55, *b*-histonets mellem 70 og 90. Hovedfiltratet mættedes derpaa med kog-salt, og fældningen opløstes i 200 ccm. vand. Ved frak-tionsforsøg med Am_2SO_4 -opløsning befandtes nu *a*-histonets fældningsgrænser at ligge mellem 30 og 41, medens *b*-histo-nets nederste fældningsgrænse var rykket ned til 65.

Ved at underkaste samme opløsning fraktionering med

mættet kogsaltopløsning fik jeg begyndende opalescens ved tilsætning af 15 dele kogsaltopløsning paa 85 dele histonopløsning og kvantitativ udfældning af første fraktion ved 25 dele kogsaltopløsning paa 75 dele histonopløsning. I filtratet fra denne fældning fik man atter opalescens ved tilsætning af kogsaltopløsning til 50 dele og kvantitativ fældning ved 75 dele. Filtratet fra denne fældning indeholdt intet histon. Hele opløsningen fældtes derfor med 25 dele mættet kogsaltopløsning, hvorved et rigeligt bundfald (*a*) opstod. Filtratet tilsattes derpaa kogsalt i substans til 75 dele, hvorved et nyt bundfald (*b*) opstod.

Bundfaldet *a* opløstes let i vand til en klar vædske, der ikke indeholdt den substans, der fældes for 20 dele Am_2SO_4 -opløsning. Fraktionsgrænserne for Am_2SO_4 -opløsning laa mellem 30 og 42. Filtratet fra denne fældning gav imidlertid en ikke ubetydelig efterfældning ved tilsætning og Am_2SO_4 -opløsning med nederste fældningsgrænse ved 70. En del af *b*-histonet var saaledes ogsaa denne gang slæbt med i *a*-histonfældningen. Ved at fælde opløsningen med 42 dele Am_2SO_4 -opløsning, fik man *a*-histonet rent. Opløst i vand gav det samtlige histonreaktioner. Ved tilsætning af 25 dele mættet kogsaltopløsning fik man en kvantitativ udfældning. Opløsningen tilsattes NH_3 til udfældning af histonet, fældningen udvaskedes med vand og behandledes med alkohol og æther. Præparatet indeholdt en kvælstofmængde af 17,86 %. Det var askefrit.

Fældningen *b* opløstes i vand. Ved halvmætning med Am_2SO_4 udfældtes en ikke ubetydelig mængde *a*-histon, der saaledes var undgaaet den første udfældning med 25 dele kogsaltopløsning. Filtratet fra fældningen for halvmætning

mættes med Am_2SO_4 , og bundfaldet opløstes i vand. Da det endnu var forurenet med spor af α -histon, tilsattes endnu en gang Am_2SO_4 til halvmætning, hvorpaa b -histonet udfældtes i filtratet ved mætning med samme salt. Fældningen opløstes i vand. Den gav b -histonets reaktioner. Ved halvmætning med Am_2SO_4 forblev opløsningen klar. Ved fraktionering med mættet kogsalt-opløsning indtraadte opalescens ved tilsætning af det lige volum. Opløsningen tilsattes NaOH til udfældning af b -histonet. Denne fældning udvaskedes med vand, alkohol og æther og blandedes med præparatet af b -histon fra foregaaende fremstilling. Kvælstofgehalten var, beregnet paa askefri substans: 18,12 %.

Forsøg no. 3. I dette forsøg blev 1 kg. thymus malet og derpaa ekstraheret 3 gange med alkohol, hvorpaa det ved filtrering og presning befriedes for den væsentligste mængde alkohol. Derpaa slammedes det op i 1,5 l. 0,5 % HCl og henstod hermed 48 timer, hvorpaa der filtreredes. Filtratet dialyseredes, til reaktionen var yderst svag sur, hvorpaa der tilsattes mættet Am_2SO_4 -opløsning til 20 dele paa 100. Der opstod da en ikke ubetydelig fældning. Denne fældning filtreredes fra. Den bestod af samme substans som omtalt i forsøg no. 1. Filtratet fra denne fældning tilsattes Am_2SO_4 -opløsning til 55 %, hvørved fraktion a faldt ud. I filtratet udfældtes fraktion b ved mætning med samme salt.

Fraktion a opløstes i 150 ccm. vand. Ved fraktionsforsøg paa mindre prøver bestemtes fældningsgrænserne for α -histonet til 40 og 48. Hovedportionen tilsattes derfor Am_2SO_4 til halvmætning og filtreredes. Filtratet gav atter opalescens ved 60 og ved yderligere tilsætning en ikke ubetydelig efterfældning. Den fældning, der indeholdt α -histonet

opløstes atter i 100 ccm. vand. Opløsningen gav alle histonreaktioner. Fraktionsgrænserne laa mellem 32 og 42—45. Filtratet herfra indeholdt ikke histon. Ved fraktionering med mættet NaCl-opløsning fik man kvantitativ fældning ved 25 dele NaCl-opløsning paa 75 dele histonopløsning. Opløsningen fældtes endnu engang med 42 dele ammoniumsulphatopløsning, bundfaldet opløstes i vand, og histonet udfældtes heraf med NH_3 . Fældningen udvaskedes med vand og behandlede med alkohol og æther. I præparatet udførtes N-analyse, der udviste en kvælstofgehalt af 17,66 %. Fraktion *b* opløstes ligeledes i vand (100 ccm.). Ved tilsætning af lige volum mættet ammoniumsulphatopløsning opstod ingen fældning. Opalescens indtraadte ved 55, og fældningen var maximal ved 65. Denne fældning opløstes atter i vand og undersøgtes paa histon. Alle histonreaktioner var positive undtagen salpetersyrereaktionen. Opløsningen tilsattes derpaa NaOH til udfældning af histonet, efter at den først en kort tid var dialyseret. Fældning indtraadte først, naar et vist, temmelig stort, overskud af NaOH tilsattes. Denne fældning opløstes atter i saltsyreholdigt vand. Ved fraktioneringsforsøg med kogsaltopløsning laa fraktionsgrænserne mellem 50 og 75, med ammoniumsulphatopløsning mellem 60 og 90. Opløsningen fældtes derpaa med NH_3 , og bundfaldet udvaskedes med vand, alkohol og æther. I præparatet udførtes N-analyser. Beregnet paa askefri substans var kvælstofgehalten 17,85 % og 18,00 % eller i gennemsnit 17,93 %.

Sammenfatter vi resultaterne af de tre forsøg, har vi her ved kunnet konstatere rigtigheden af *Malengreaus* angivelse om existensen af to forskellige histoner i saltsyreextrakt af thymus. Det ene histon eller *a*-histonet giver alle de

5 af mig opstillede histonreaktioner, medens det andet histon eller *b*-histonet blot giver 4 af reaktionerne, nemlig NH_3 -reaktionen, alkaloidreagensprøven, æggehvidefældningen, kogningsprøven, men *ikke* salpetersyrereaktionen. Begge histoner giver en vakker rosafarvet biuretreaktion samt ved kogning med *Millons* vædske en rødfarvet opløsning. Fremdeles kan *a*-histonet lettere udsaltes med kogsalt og ammoniumsulphat end *b*-histonet. Enhver af histonerne har sine bestemte fraktionsgrænser forskellige fra hinanden. Fraktionsgrænserne vexler noget efter opløsningernes koncentration paa histon. (Et lignende forhold har jeg forøvrigt observeret for serumæggehvidens — baade globulinernes og albuminernes — vedkommende ligeoverfor ammoniumsulphatopløsning). Endelig indeholder *a*-histonet en kvælstofmængde af 17,79 %, medens *b*-histonets N-gehalt er 18,03 %. Differenserne i kvælstofgehalten er dog altfor smaa, endog indenfor feilgrænserne, og undersøgelserne for faatallige til, at man kan bygge noget herpaa. Ingen af histonerne indeholder blysværtende svovl. Fremdeles er *b*-histonets askegehalt større end *a*-histonets. Angaaende dette forhold er dog ogsaa undersøgelserne for faatallige til at drage nogle bestemte slutninger. *a*-histonet synes endelig at kunde udfældes ved mindre NH_3 - (og NaOH -) tilsætning end *b*-histonet, medens det omvendt er lettere opløseligt i overskud af fældningsmidlet. Opløst i NH_3 frembringer tilsætningen af et NH_3 -salt paany fældning: *b*-histonet er vanskelig opløselig i overskud paa NH_3 .

Det maa derfor ansees berettiget at opstille to histoner fra thymus, men de viser sig dog at være hinanden *meget nærstaaende* i sine reaktioner og i sin elementare sammen-

sætning, saavidt denne kjendes. At gaa nærmere ind paa denne, ligger udenfor nærværende arbeides ramme.

Imod existensen af to histoner i thymus kunde der imidlertid gjøres en indvending. *Kutscher*¹ har nemlig fundet, at thymus indeholder et proteolytisk ferment, der i lighed med trypsin formaar fuldstændig at spalte æggehvilelegemerne i thymus i deres endelige spaltning produkter. Man kunde derfor antage, at dette autolytiske ferment havde bevirket en delvis omdannelse af *et* præformeret histon, f. ex. *a*-histonet, til *b*-histon og maaske andre spaltning produkter, blandt hvilke man kunde tænke paa *Fleroffs*² parahiston. At denne spaltning i tilfælde maatte foregaa ved sur reaktion, deri er intet paafaldende, da *Hedin*³ har vist, at et lignende proteolytisk ferment i milten virker kraftig ved endog sterk sur reaktion. Omendskjønt man ikke med sikkerhed kan udelukke denne mulighed, turde dog forsøg no. 3 tale mod rigtigheden af en saadan anskuelse. Tiltrods for at de friske thymuskjertler gjentagne gange var behandlet med alkohol, indeholdt dog saltsyreextraktet mindst ligesaameget *b*-histon som i de foregaaende forsøg. Den samme alkohol- (og æther-) behandling har *Fleroff* benyttet ved præparationen af sine thymuskjertler. Den mulighed findes jo unægtelig, at fermentet kunde være alkoholstabil, men denne mulighed synes mig at være fjerntliggende. Et forsøg, hvor thymus først blev udkogt med alkohol, viste ogsaa existensen af to histoner.

¹ Zeitschr. f. physiol. Chemie. Bd. 34, pg. 114 flg.

² Ibid. Bd. 28, pg. 307 flg.

³ Ibid. Bd. 32, pg. 341 flg.

Førend kapitlet om histonerne afsluttes, turde det være paa sin plads at sammenholde resultatet af nærværende undersøgelser med den tidligere opfatning af «thymushistonet» i særdeleshed og histonbegrebet i sin almindelighed.

For det første har *Malengreus* og mine undersøgelser godtgjort, at det tidligere beskrevne thymushiston ikke er noget enkelt legeme, men bestaar af tre substanser, nemlig *a*-histonet, *b*-histonet og den tredie albuminatlignende substans, der ganske vist er opløselig i overskud paa NH_3 , men som dog let slæbes med som en forurensning, (cfr. forsøg no. 1). Denne substans er intet egentligt histon. Da den senere vil blive udførlig omtalt, vil jeg paa dette sted indskrænke mig til følgende antydning. At denne substans er indgaaet som forurensning ved mine tidligere fremstillinger af thymushistonet, anser jeg for givet bl. a. af den omstændighed, at jeg dengang ved kogning med *Millons* vædske fik fældning, medens saavel *a*- som *b*-histonet ved kogning med reagenset blot giver en rødfarvet opløsning. Vedkommende substans giver ved kogning med *Millons* reagens det sædvanlige svagt rødfarvede koagel. Desuden indeholdt «thymushistonet» løst bundet svovl, medens *a*- og *b*-histon intet saadant indeholder. Ved mine tidligere analyser over thymushistonets kvælstofgehalt¹ blev denne fundet at være 18,35 %, medens *a*-histonets kvælstofgehalt er fundet at være 17,79 % og *b*-histonets 18,03 % — altsaa noget mindre. Nogen forklaring af dette afvigende forhold ser jeg mig ikke istand til at give. — Albuminatet indeholder endnu mindre N end histonerne. *Fleroff* angiver

¹ 1. c.

² 1. c., pg. 311.

efter sine analyser thymushistonets N-gehalt at være 18,35 %, medens *Huiskamp* som gennemsnit fandt 18,09 % (3 analyser). Ved elektrolyse sank kvælstofgehalten til 17,64 %.

Gaar vi over til spørgsmaalet om, hvilken indflydelse de foreliggende undersøgelser vil have paa vor opfatning af det almindelige histonbegreb, er det klart, at vor definition af dette begreb i nogen mon maa modificeres. *Forf.s* definition af et histon som et legeme, der giver de 5 omtalte histonreaktioner, er nemlig ikke træffende for *b*-histonet, da dette legeme ikke giver salpetersyrereaktionen. Denne reaktion kan derfor ikke opretholdes som en generel histonreaktion, da det jo ikke kan ansees for tvilsomt, at *b*-histonet maa opfattes som et virkeligt histon. Siden fremkomsten af mit omtalte arbeide over histon er der forøvrigt beskrevet flere histoner, der viser lignende afvigelser overfor salpetersyrereaktionen. Saaledes har *Ehrström*¹ beskrevet et histon fra de modne spermatozoer hos *Lota vulgaris*, hvilket histon ikke gav salpetersyrereaktionen. *Fleroffs* parahiston forholder sig paa samme maade.

Imidlertid turde hele histonbegrebet vistnok tiltrænge en yderligere revision. Foruden salpetersyreprøven maa nemlig ogsaa *kogningsprøven* udrangeres, da saavel *Lota*-histonet som parahistonet ikke giver denne reaktion. Men heller ikke *ammoniakreaktionen* kan siges at være nogen *generel* histonreaktion. Allerede i min histonafhandling har jeg paavist denne reaktions ringe betydning, og de senere beskrevne histoner har yderligere bekræftet dette. *Fleroffs* parahiston gav saaledes absolut ingen NH_3 -reaktion og *Mathews*'² arbasin gav i hvert fald en yderst ufuldstændig

¹ Zeitschr. f. physiol. Chemie. Bd. 32, pg. 350 flg.

² Ibid. Bd. 23, pg. 402 flg.

fældning for ammoniak, og er dog trods dette accepteret af *Kossel*, NH_3 -reaktionens forkjæmper, som et ægte histon, og jeg indser da ikke, hvorledes man kan opretholde reaktionen som en *conditio sine qua non*. Af de oprindelige 5 histonreaktioner staar da blot *to* tilbage, der udgjør de generelle histonreaktioner, nemlig forholdet til alkaloidreagenserne og æggehvidefældningen. Men til gjengæld forekommer ogsaa disse histonreaktioner konstant. *Fleroff* anfører ganske vist, at parahistonet *ikke* fælder *Wittes* pepton, men ved nærmere undersøgelse deraf har jeg¹ paa-vist, at parahistonet fælder genuin æggehvide.

Spørgsmaalet bliver da, om disse to reaktioner kan siges at være specielle gruppereaktioner paa histon, og fremdeles om disse reaktioner i saa fald er tilstrækkelige til at karakterisere histonet. Vi maa da strax indrømme, at saa ikke er tilfældet. Protaminerne giver som bekendt begge disse reaktioner, hvad man vidste længe, førend man fandt, at histonerne ogsaa gav dem.

Klassifikationen af histonerne frembyder saaledes ganske store vanskeligheder, naar vi vil søge at karakterisere dem efter deres reaktioner. Vi vil derfor et øieblik undersøge, om det er muligt at give en mere indgaaende karakteristik af deres konstitution.

En saadan karakteristik maa baseres paa en undersøgelse af deres *spaltningsprodukter*. Saadanne undersøgelser foreligger dog kun for meget faa histoners vedkommende, og desuden er de foreliggende undersøgelser meget ufuldstændige, specielt for monamidosyrernes vedkommende. Vor væsentligste kjendskab til histonernes

¹ Zeitschr. f. physiol. Chemie. Bd. 30, pg. 578.

sammensætning skyldes *Kossels* og *Kutschers*¹ undersøgelser af thymushiston og gadus-histon. Mine orienterende undersøgelser over scombronets sammensætning stemmer godt overens med disse forskeres resultater. Under henvisning til vedkommende afhandling skal her blot nævnes, at histonerne er de æggehvidelegemer, der næst protaminerne indeholder den største — relative og absolute — mængde diamidosyrer. Dog maa det mærkes, at eventuelle undersøgelser over flere histoners sammensætning kan bringe afvigende forhold for dagen.² De forskellige histoners kvælstofmængde viser saaledes store forskelligheder — fra 15 % til 20 %. Saadanne variationer finder man f. ex. for protaminernes vedkommende, hvor salminet indeholder 87,8 % diamidosyrer (arginin), medens cyclopterinet blot indeholder 67,7 %. Gadus-histonet indeholdt 38,70 % diamidosyrer. Differensen mellem gadus-histonet og cyclopterinet bliver saaledes 29 %, medens differensen mellem cyclopterinet og salminet paa den anden side bliver 20 %. Fremdeles finder man, at gadus-histonet indeholder ikke mindre end 30,52 % mere diamidosyrer end f. ex. gluteïn-fibrinet.

Der gives fremdeles, som *Kossel* (pg. 210) selv fremholder, ingen gennemgribende kvalitativ forskjel mellem protaminerne og de øvrige æggehvidelegemer. Under saadanne omstændigheder synes det mig berettiget at slaa histon- og protamingruppen *sammen til en fælles æggehvide-gruppe*. Og jeg vil kortelig begrunde dette mit forslag.

¹ Zeitschr. f. physiol. Chemie. Bd. 31, pg. 165 flg.

² Parahistonet indeholder blot 11,7 % af sit totalkvælstof som diamidosyrer, hvorfor *Kossel* udelukker det fra histongruppen. Denne udelukkelse synes mig ikke ganske berettiget, da parahistonet har sterke basiske egenskaber.

1. Saavel histonerne som protaminerne er *basiske* æggehvidelegemer. Som et udtryk for denne basisitet kan nævnes deres forhold til æggehvidefældende syrer, naar opløsningen reagerer neutral og selv om en anorganisk base er tilstede. Denne egenskab udmerker disse substanser fremfor alle andre æggehvidelegemer. (Jeg har i mit histonarbejde omtalt, at en bestanddel af *Wittes* pepton ogsaa fældes af alkaloidreagenserne, men for det første er *Wittes* pepton et meget heterogent produkt, og dernæst har jeg ved undersøgelse af andet materiale af samme ekstraktion *ikke* faaet reaktionen frem, hvoraf jeg slutter, at den skyldes en tilfældig forurensning i det tidligere undersøgte præparat.)

2. Begge giver fældning med *genuine* æggehvidelegemer. Dette forhold er dog ikke absolut karakteristisk, da ogsaa andre æggehvidelegemer gjør det samme. Men den egenskab savnes aldrig.

3. Saavel histonerne som protaminerne udmerker sig ved en høi gehalt af hexonbaser. Den komponent af æggehviden, der betinger *Millons* reaktion, mangler oftest hos protaminer og er i regelen svagt fremtrædende hos histonerne. — Den samme komponent kan som bekjendt fattes hos enkelte albumoser.

4. Foruden at histonerne og protaminerne har sine vigtigste reaktioner tilfælles, taler fremdeles den omstændighed i høi grad for deres nære slægtskab, at histon og protamin i spermatozoerne kan remplacere hinanden. Hos enkelte fiske finder man saaledes nucleinsurt protamin, hos andre nucleinsurt histon. Og ikke alene dette, men hos de fiske, der indeholder protamin, finder man i den umodne spermatozoe histon, i den modne protamin.

Imod en saadan inddeling kan to indvendinger gjøres.

For det første kan man indvende, at diamidosyrernes mængde i protaminerne er betydelig større end i histonerne, og at dette betinger en saa stor forskjellighed, at det opveier lighederne. Overfor dette kan imidlertid henvises til forholdet mellem de enkelte protaminer salmin og cyclopterin, hvor differenserne er ikke mindre end 20,1 %, medens differenserne mellem cyclopterin og gadus-histon er 29 %. Cyclopterinet staar saaledes i denne henseende ligesaa fjernt fra salminet, som det staar fra histonet.

Fremdeles kunde man indvende, at protaminernes *molekularvægt* vistnok er meget mindre end histonernes. Histonerne skulde i overensstemmelse hermed være mere komplicerede legemer end protaminerne. Men en saadan indvending synes mig ikke at have synderlig vægt, da protaminerne efter *Kossel*¹ besidder en overmaade høi molekularvægt, idet de *ikke* bevirker *nogen forhøielse af kogepunktet*.

Histonerne og protaminerne udgjør saaledes *en* ganske vel begrænset æggehvidegruppe, *de basiske æggehvidelegemer*. Inden denne gruppe kan der opstilles en række forskellige underafdelinger fra de enkleste æggehvidelegemer til de mere komplicerede.

Saaledes omfatter salminet og clupeinet *en* gruppe, sturinet en noget mere kompliceret gruppe og endelig cyclopterinet den mest komplicerede gruppe inden protaminerne. Det næste led er da histonerne, hvor man ogsaa utvilsomt vil kunne opstille en lignende rækkefølge fra mindre til mere sammensatte legemer — gadus-histon, scombron til parahiston. Saavidt jeg forstaar, er dette

¹ Berichte d. deutschen chem. Gesellsch. 34, pg. 3233.

det eneste mulige inddelingsprincip for histonerne. Man bringer herved den kemiske og fysikalske karakteristik i harmoni med hinanden.

B. Undersøgelse af nucleoproteïdet fra thymus seet i sammenhæng med Huiskamps, Malengreaus og mine egne arbejder.

Allerede *Lilienfeld*¹ havde erkjendt, at thymus indeholdt flere nucleoproteïder end nucleohistonet, idet han ved ekstraktion med 10 % kogsaltopløsning og udfældning ved paafølgende fortynding med vand, fremstillede et i vand uopløseligt nucleoproteïd. Vi vil i det følgende bortse fra dette legeme.

Jeg fandt senere, at der ved ekstraktion paa thymus med 0,9 % NaCl gik et nucleoproteïd i opløsning, hvilket ogsaa var let opløseligt i vand, men *ikke* indeholdt histon.

Dette nucleoproteïd antog jeg ogsaa fandtes i vand-extraktet af thymus resp. i *Lilienfelds* nucleohiston. En undersøgelse af dette bekræftede denne formodning.

Huiskamp fandt ligeledes et nucleoproteïd i filtratet fra nucleohistonet, naar dette var udfældt med CaCl_2 . Dette nucleoproteïd indeholdt heller ikke histon.

Malengreau udfældte sit ene nucleoproteïd ved halvmætning med ammoniumsulphatopløsning og det andet ved helmætning. Begge indeholdt histon.

¹ l. c.

Spørgsmaalet bliver da, i hvilket forhold disse nucleoproteïder staar til hinanden. Man kan jo paa forhaand nære en formodning om, at *Huiskamps* og mit nucleoproteïd er identiske, (begge indeholder saaledes rigelige mængder xanthinbaser og intet histon), men hvad *Malengreaus* angaar, stiller sagen sig tvilsommere, da dette indeholdt histon og desuden havde en fra *Huiskamps* proteïd forskjellig phosphorgehalt. Den endelige afgjørelse af identiteten af *Huiskamps* og mit nucleoproteïd maa ske ved undersøgelse af substansernes elementære sammensætning. Fra *Huiskamps* haand foreligger fuldstændige elementaranalyser over hans nucleoproteïd, for mit nucleoproteïds vedkommende har jeg foretaget en fuldstændig undersøgelse deraf, som nedenfor skal refereres.

Til fremstilling af mine analysepræparater benyttede jeg friske thymuskjertler, der maltes i kjødkværn og derpaa tilsattes 0,9 % NaCl-opløsning, hvormed de henstod 24—48 timer i kulden. Oftest tilsattes desuden nogle draaber chloroform. Allerede efter kort tids forløb indeholdt vædsken substanser, fældbare med eddikesyre. Vædsken blev tillige sterkt opalescerende. Der skeede herunder ingen opsvulmning af kjertelsubstansen, heller ikke klumpede den sig sammen. Opløsningen havde en *amfoter* reaktion, hvoraf den alkaliske komponent var stærkest fremtrædende.

Efter nævnte tid blev vædsken hældt fra, centrifugeret og filtreret. Den var fremdeles uforandret i udseende — omtrent som skummet melk. Derpaa tilsattes CaCl_2 til 0,1—0,2 %, uden at der dog nogensinde opstod noget bundfald. I det hele var det umuligt at frembringe nogen fældning med CaCl_2 , hvor meget eller lidet jeg end tilsatte. Da jeg tænkte mig den mulighed, at tilstedeværelsen af

kogsaltet kunde hindre en eventuel udfældning for CaCl_2 , blev i et forsøg opløsningen først dialyseret og derpaa tilsat CaCl_2 , uden at nogen fældning var at spore. Derimod lykkedes det mig at faa fældning frem, hvis man i stedet for CaCl_2 tilsatte *kalkvand*, eller om man før tilsætningen af CaCl_2 gjorde opløsningen svagt alkalisk. Maaske kan dette forklare modsætningen mellem mine og *Huiskamps* fund, idet han finder, at hans proteïd fældes om end ufuldstændigt for CaCl_2 . Efter tilsætning af eddikesyre opstod der et rigeligt bundfald. Tilsattes *for meget* eddikesyre, indtraadte ingen fældning, da vedkommende substans er let opløselig i overskud heraf. Allerede 1 % eddikesyre i vædsken opløser fældningen. Ved tilsætning af en mineral-syre behøves meget mindre for at hindre fældningens fremkomst. Allerede 0,2 % HCl i vædsken er nok. *Den samme iagttagelse refererer Malengreau for sit nuclealbumins vedkommende.*

Behandlede man den opalescerede vædske med fortyndet alkali (0,05—0,1 %), indtraadte der opklaring; samtidig antog vædsken en brun-gul farve. Hvis man dialyserede denne vædske, blev den efterhaanden mere blakket og antog sit oprindelig opalescerende, melkede udseende, naar det tilsatte alkali var dialyseret bort.

Den nysnævnte fældning for eddikesyre var hvid med et stik i gult. Den blev udvasket (ved dekantation og filtrering) til filtratet ikke gav biuret- eller klorreaktion. Derpaa udvaskedes den med alkohol og æther, hvorved man fik et gulhvidt, fint pulver, der tørredes til konstant vægt ved 100°C . Paa dette præparat udførtes en fuldstændig elementaranalyse. De fundne værdier var følgende: C 49,50 %, H 6,35 %, N 16,51 %, P 1,22 %—1,01 %.

Substansen indeholdt 2,36 % aske. Omregnes tallene paa askefri substans, faar man: C 50,69 %, H 6,50 %, N 16,91 %. Asken indeholdt jern. Proteidet indeholdt desuden bly-sværtende svovl.

Sammenlignes disse værdier med *Huiskamps* analyser, viser gennemsnittet af 2 analyser paa proteidet, udfældt med eddikesyre, nedenstaaende værdier. Til sammenligning sættes mine ved siden af.

	C	H	N	P	Aske
<i>Huiskamp</i>	50,09 %	7,18 %	16,11 %	0,97 %	3,11 %
<i>Bang</i>	49,50 -	6,35 -	16,61 -	1,12 -	2,36 -

omregnet paa askefri substans:

	C	H	N
<i>Huiskamp</i>	51,70 %	7,42 %	16,65 %
<i>Bang</i>	50,69 -	6,50 -	16,91 -

Overensstemmelsen er for N og P tilfredsstillende, derimod stemmer værdierne for C og H ikke særlig godt overens. Differenserne ligger udenfor fejlgrænserne. Man bør dog efter min formening lægge hovedvægten paa P-værdierne, og mindre paa de øvrige, — særlig er C- og H-værdierne mindre væsentlige for æggehvidelegemers vedkommende. Der er paa dette vigtige punkt god overensstemmelse (0,97 % og 1,05 % P) mellem *Huiskamp* og mig i modsætning til *Malengreau*, der fandt 0,5 % P i sit a-nucleoalbumin. Da jeg ansaa det vigtigt selv at undersøge *Huiskamps* proteid, fremstillede jeg saadant efter hans egen methode. Dette præparat indeholdt 0,91 % P og 15,89 % N. Askegehalten var 2,18 %; kvælstofmængden, omregnet paa askefri substans, altsaa 16,24 % — saaledes mindre end *Huiskamp* har fundet.

Endvidere vil jeg paa dette sted fremhæve, at jeg ved undersøgelse af nucleoproteïdets spaltningsprodukter, der i det følgende vil blive omtalt, har fundet nøiagtig samme resultater saavel for *Huiskamps* som mit proteïd. Jeg tror derfor at kunne slutte, at disse to substanser er et og samme legeme, muligens med tilblanding af mindre mængder fremmede bestanddele. Jeg anser nemlig fremstillingsmaaden — udfældning med eddikesyre — forsaavidt som en upaalidelig methode, da man jo derved faar udfældt alle de substanser, der er fældbare for eddikesyre, og ingen kan paa forhaand garantere, at blot *en* for eddikesyre fældbar substans foreligger, selv om man har garderet sig mod det egentlige nucleohistons — eller nucleïnsure histons — nærværelse. Det er derfor høist paakrævet at kombinere denne fremstillingsmethode med andre saadanne, deriblandt ogsaa *Malengreaus*. Før end jeg gaar over hertil, skal jeg blot kortelig omtale en undersøgelse, der staar i forbindelse med de foregaaende.

I den sidste tid er der af *Pekelharing*¹ og *Nencki-Sieber*¹ fremstillet et proteïd fra ventrikelslimhinden, hvilket foruden æggehvite indeholdt xanthinbaser, phosphor og en pentose. Det merkelige ved dette proteïd var, at man ved alkoholbehandling fuldstændig kunde ekstrahere phosphoret. Da jeg nu observerede, at udvaskningen med alkohol ekstraherede betydelige mængder lecithin, blev der fremstillet et proteïd-præparat, der gjentagne gange *udkogtes* med alkohol. Phosphoranalysen viste imidlertid i dette præparat en P-gehalt af 1,42 %, saa mængden snarere var forøget end formindsket.

Malengreau gaar, ligesom *Huiskamp*, ud fra vandextraktet af thymus og udfælder heraf sine proteïder med *eddikesyre*. Fældningen opløses i fortyndet alkali, og af denne opløsning fældes nuclealbumin *a* ved halvmætning med ammoniumsulfat. I filtratet herfra udfældes *b* nuclealbuminet ved helmætning.

Fældningen ved halvmætning opløses derpaa i vand og kan nu yderligere renses ved fraktionering med salt eller, hvad *Malengreau* foretrækker, ved fortynding med vand og fældning med eddikesyre. I overensstemmelse med *Huiskamp* har jeg fundet, at fældningen ved Am_2SO_4 ikke løser sig fuldstændig i vand, men at en ganske betydelig del bliver tilbage paa filtret.

Malengreau anfører, at hans α -nuclealbumin er opløselig i 0,9 % NaCl og 0,1 % CaCl_2 .

Idet jeg gik over til undersøgelsen af proteïderne efter *Malengreau*, tillod jeg mig i en henseende at afvige fra hans methodik; jeg undlod at fælde med eddikesyre og fraktionerede direkte vandextraktet fra thymus.

Vandextraktet (af 500 gr. thymus) havde samme opalescerende udseende som kogsaltextraktet. Ved halvmætning fik jeg en rigelig fældning. Filtratet var ganske vandklart. Fældningen opløste sig delvis i vand, opløsningen fældtes paany ved halvmætning med Am_2SO_4 og udvaskedes grundig med halvmættet Am_2SO_4 -opløsning og $\bar{\text{A}}$ -holdigt vand. Fældningen behandledes med 200 ccm. 0,3 % HCl, hvori den delvis opløste sig. (*Malengreau* har vist, at proteïdet, naar det er udfældt med $\bar{\text{A}}$, blot delvis opløser sig i 0,3 % HCl, medens en opløsning af proteïdet ikke fældes ved tilsæt-

¹ Zeitschrift f. physiol. Chemie, Bd. 32, Pg. 291.

3 — Archiv for Math. og Naturv. B. XXV.
Trykt 17. decbr. 1902.

ning af samme mængde saltsyre). Efter 24 timer filtreredes. *Filtratet gav ved tilsætning af et overskud NH_3 ingen fældning.* Derpaa dialyseredes opløsningen 24 timer mod rindende vand. Tilsattes nu en draabe NH_3 til en prøve, opstod et voluminøst bundfald, og man kunde derpaa successive tilsætte NH_3 til sterk alkalisk reaktion, uden at fældningen opløste sig.

Hvis man derimod *paa engang* tilsatte et overskud af NH_3 , *indtraadte absolut ingen fældning.* En paafølgende tilsætning af Am_2SO_4 bragte atter fældning frem, dog først ved tilsætning af en *større mængde.*

Nucleoproteïdet blev saaledes ved indvirkning af 0,3% saltsyre spaltet i en opløselig komponent og en rest, der ikke opløstes af HCl.

Jeg maa saaledes medgive rigtigheden af *Malengreau's* angivelse: at α -nucleoalbuminet sønderdeles ved indvirkning af saltsyre i en opløselig og en uopløselig komponent. Derimod var det ingenlunde bevist, at den opløselige komponent var et *histon*. Tvertimod talte yderligere iagttagelser sterkt imod en saadan opfatning, idet nemlig *den omtalte fældning allerede indtraadte ved neutralisation* af opløsningen, (under dialysen var der saaledes allerede udfældt en stor del substans). Efter saaledes at have orienteret mig angaaende *Malengreau's* proteïd, gik jeg over til undersøgelse af mit proteïd efter hans methode. Først forsøgte jeg at fastsætte fraktionsgrænserne for proteïdet i kogsaltextraktet af thymus. Den nedre fældningsgrænse var det mig umuligt at fastslaa med sikkerhed, idet opløsningen paa forhaand var opalescerende. *Fældning* indtraadte i almindelighed ved 30. I et forsøg, hvor kogsaltextraktet var rigt paa substans, fik man en svag fældning allerede

ved 20, i andre ved 25 o. s. v. Ved tilsætning til 35—40 udfældtes første fraktion, anden fraktion laa mellem 46—60 og tredje mellem 68 og mætning. Alle tre opløstes i vand. Første fraktion opløstes ufuldstændig, de andre fuldstændigere. *Alle tre opløsninger* gav fældning ved eddikesyre. Imidlertid viste det sig, at første fraktion udfældtes fuldstændig ved 40, medens anden fraktion indeholdt substanser fra første fraktion, der var undgaaet første gangs fældning, og som nu kunde udfældes ved 40, og som desuden kunde fældes heraf med $\bar{A}$. Tredie fraktion indeholdt blot smaa mængder substans, fældbare ved $\bar{A}$. Denne sidste substans var efter sine fraktionsforhold forskjellig fra den fældbare substans i første og anden fraktion.

Kogsaltextraktet indeholdt saaledes i det mindste to substanser, der fældtes af $\bar{A}$. Den ene af disse findes dog i overveiende mængde, den anden blot som smaa spor. Ganske paa samme maade forholdt *vandextraktet* sig, naar man paa forhaand fjernede det nucleinsure histon med CaCl_2 .

Jeg havde saaledes fundet en god overensstemmelse mellem Malengreaus, Huiskamps og mit proteïds fraktioneringsforhold.

Som tidligere nævnt har *Huiskamp* og jeg ikke fundet noget histon i vore proteïder, medens *Malengreau* har fundet et saadant. Min næste opgave blev derfor at undersøge disse forhold nærmere.

Nu kunde jeg ikke sætte HCl direkte til min opløsning blandt andet af den grund, at der i saa fald ikke opstod nogen fældning. Først maa derfor proteïdet fældes med eddikesyre, og derpaa maa man lade HCl indvirke paa fældningen.

Saa blev ogsaa gjort, men førend jeg lod HCl indvirke paa mit proteïd, ønskede jeg at fremstille dette i *ren* til-

stand, befriet for *den anden substans* i kogsaltextraktet, der fældes for $\bar{A}$. Derfor opløstes $\bar{A}$ -fældningen i fortyndet alkali. Jeg observerede herved, at $\bar{A}$ -fældningen var temmelig tungt opløselig i alkali. Man maa tilsætte indtil 0,3 %, (fældningen var selvfølgelig først fuldstændig udvasket til neutral reaktion), inden en begyndende opløsning indtraadte, og selv nu foregik opløsningen af fældningen meget langsomt; — den tog ca. 2 dage, tiltrods for at stoffet var overmaade fint fordelt i vædsken. Vædsken blev derpaa filtreret og dialyseret, hvorved den antog et melket udseende og fraktioneret med Am_2SO_4 -opløsning. Til min overraskelse fandt jeg nu fraktionsgrænsen betydelig forrykket.

Der opstod nemlig i denne opløsning opalescens allerede ved 14—15, og ved tilsætning til 19—20 udfældtes en fraktion, der indeholder rigelige mængder substans. Filtratet indeholdt blot smaa mængder æggehvite — og gav efter dialysen blot en sparsom fældning ved $\bar{A}$.

Denne sidste fældning gav opløst i NaOH atter *delvis* fældning ved 20 % Am_2SO_4 -opløsning. Resten kunde udfældes ved mætning med saltet. Det har dog ogsaa forekommet, at der ingen efterfældning er opstaaet ved tilsætning af 20.

Dette eiendommelige forhold har jeg meget indgaaende kontrolleret og fundet, at øvre fraktionsgrænse ligger mellem 17—18. Koncentrationen af opløsningen udøver meget liden indflydelse paa forholdet. I flere kogsaltextrakter bestemtes fraktionsgrænserne for proteidet før og efter fældning med $\bar{A}$. Uden undtagelse konstateredes ovennævnte forrykkelse af fraktionsgrænserne. I det oprindelige kogsaltextrakt laa nedre fældningsgrænse ved 30 eller

lavere, helt ned til 20; men denne fældning var yderst ringe og fremkom først efter længere tids — indtil 24 timers — henstand, hvorimod $\bar{A}$ -fældningen, opløst i alkali, strax gav en kvalitativ udfældning ved 18—20. Opløstes denne fældning i vand med spor af alkali, blev den atter fuldstændig udfældt af 20. Endnu mere bevisende synes mig følgende forsøg at være: I et kogsaltextrakt bestemtes nedre fraktionsgrænse til 25. Derpaa tilsattes en dialyseret opløsning af A-fældningen (10 : 100) og endelig 20 % Am_2SO_4 -opløsning. Der opstod en rigelig fældning, og filtratet herfra havde sine oprindelige fraktionsgrænser uforandret.

Der maa heraf drages den slutning, at proteïdet ved fældning med eddikesyre eller ved opløsning i alkali har undergaaet en eller anden forandring. Før jeg kunde gaa videre, maatte disse forandrings natur erkjendes.

For først at afgjøre, om eddikesyren eller alkaliet bevirkede forandringen, tilsatte jeg vexlende mængder alkali til mit oprindelige kogsaltextrakt og derpaa 20 dele Am_2SO_4 -opløsning. Det viste sig da, at en tilsætning af NaOH til 0,01 % ingen forandring frembragte, 0,02 % bevirkede en delvis fældning ved 20 og 0,03 % en *rigelig* fældning, der ikke forøgedes ved yderligere tilsætning af alkali. I kontrolprøver tilsattes først Am_2SO_4 -opløsning og derpaa alkali. Imidlertid opstod ikke fældning i nogen af disse, selv om alkalimængden øgedes til 1 %. Denne forskjel kan kun bero paa omsætning af Am_2SO_4 og NaOH til Na_2SO_4 og NH_3 . I fuld overensstemmelse hermed frembragte vexlende mængder NH_3 ingen saadan forandring. Ved paafølgende tilsætning af Am_2SO_4 -opløsning blev vædsken klar. Man ser saaledes, at NaOH-tilsætning er istand til at bevirke en saadan forandring. Hermed er ikke udelukket, at

eddikesyren ogsaa kan bevirke forandringen. Dette er let at vise, naar man nemlig opløser fældningen ved $\bar{A}$ i fortyndet NH_3 istedetfor i $NaOH$. Tilsattes hertil mættet Am_2SO_4 -opløsning, fik man rigtig fældning ved 20, hvilket efter det foregaaende neppe kan skyldes NH_3 . Det lykkedes mig endnu mere afgjørende at vise eddikesyrens virkning. Jeg observerede nemlig, at $\bar{A}$ -fældningen ved gjentagne ganges udvaskning med vand blev mindre, idet der efterhaanden gik endel i opløsning. *Denne gav ogsaa en rigtig fældning* ved 20 % Am_2SO_4 -opløsning. Derved blev fældningen uopløselig i vand trods langvarig udvaskning, men opløstes let af fortyndede alkalier.

Hvilke er da de forandringer, der er foregaaet?

Til besvarelse af dette spørgsmål fremstillede jeg et analysepræparat, der fandtes at have en P-gehalt af 1.00 %—1.03 % eller i gennemsnit 1.02 %, *altsaa den samme P-gehalt som eddikesyrefældningen selv*. Heraf skulde fremgaa, at *ingen* forandring i sammensætningen var indtraadt, samt at den oprindelige fældning *ikke* indeholdt forurensninger af andre substanser eller i saa smaa mængder, at de ingen indflydelse har paa analyseresultatet. Sikkert var dette dog ikke. Det var saaledes mistænkeligt, at fældningen ved $\bar{A}$ var saa tungt-opløselig i $NaOH$. Endnu mere tungt opløselig var den i NH_3 . Jeg fik det indtryk, at noget af fældningen var lettere opløseligt end andet. Derfor behandledes i et tilfælde $\bar{A}$ -fældningen fra kogsaltextraktet med meget fortyndet $NaOH$ — ca. 0.04 % — der blot opløste en mindre del af fældningen. Opløsningen deraf var vandklar (medens en opløsning af *hele* fældningen er meget blakket), fældtes med $\bar{A}$, og af denne fældning fremstilledes et analysepræparat. Dette indeholdt 2.10 og 2.38 % P —

i gennemsnit 2,24 % P og 16,57 % N — *altsaa en dobbelt saa høi P-gehalt som nucleoproteïdet.*

Dette viser, at nucleoproteïdet ved fældning med $\bar{A}$ spaltes i to substanser, en, der er let opløselig og en, der er tungt opløselig i alkali. Begge disse fældtes af 20 % Am_2SO_4 -opløsning. Eddikesyren er saaledes intet indifferent middel til udfældning af dette proteïd, og denne omstændighed turde mane til forsigtighed med anvendelsen heraf i sin almindelighed.

Jeg gik nu over til undersøgelsen af saltsyrens indvirkning paa proteïdet. Tidligere er nævnt, at saltsyre af 0,3 % ikke frembringer nogen fældning i en *opløsning* af nucleoproteïdet, — det er i saa henseende ligegyldigt, om det er det oprindelige kogsaltextrakt eller opløsningen af $\bar{A}$ -fældningen i alkali. Lader man derimod 0,3 % HCl indvirke paa $\bar{A}$ -fældningen, sker ingen fuldstændig opløsning. I mine første meddelelser om nucleoproteïdet kunde jeg, ligesaalidt som *Huiskamp*, paavise nogensomhelst spaltende virkning af saltsyren paa proteïdet. Disse angivelser tager jeg herved fuldstændig afstand fra. I overensstemmelse med den af *Malengreau* beskrevne spaltning af hans proteïd ved saltsyre, har jeg fundet, at ogsaa mit proteïd — og ligesaa *Huiskamps* — spaltes herved. Aarsagen til mit tidligere negative fund kan jeg ikke forklare. Det er en gang under disse undersøgelser hændt mig, at salt-syreextraktionen var negativ — mindst 20 gange er den faldt positiv ud. *Malengreau* anfører ogsaa (*La Cellule*, Tome XIX, Pg. 293), at det samme, er passeret ham, naar han udfældte sine substanser med Am_2SO_4 . For at undersøge, om det proteolytiske ferment skulde spille nogen rolle, ekstraheredes i et forsøg thymus med kogsaltopløsning paa

is, uden at dette gjorde nogen forskjel. Sikkert nok er, at man ved saltsyreextraktionen faar rigelige mængder af en substans i opløsning. Tilsættes forsigtig NH_3 til alkalisk reaktion, faaes en rigelig fældning, hvilken fældning udebliver, om overskud af NH_3 tilsættes paa en gang. *Den samme fældning opstaar ogsaa ved neutralisation af vædsken, ja endog ved svag sur reaktion.* Filtratet fra denne fældning indeholdt ikke eller blot spor af æggehvide. Det var hermed godtgjort, at mit (og *Huiskamps*) proteïd ved spaltning med fortyndet saltsyre leverer det samme spaltningsprodukt som *Malengreaus*, og at dette ikke er noget histon, men snarere et acidalbuminat. Histonerne giver nemlig uden undtagelse med syrer *neutralt reagerende, opløselige forbindelser*, og en substans, der udfældes ved *sur* reaktion, kan derfor ikke være noget histon. Albuminatets forholdsvis tungtopløselighed i NH_3 forklarer *Malengreaus* feiltagelse i dette punkt.

Derpaa bestemte jeg albuminatets forhold til Am_2SO_4 , opløst i minimum af syre eller alkali. *Det udfældtes fuldstændig ved tilsætning af Am_2SO_4 -opløsning til 20.* Naar jeg tidligere (pg. 34) har omtalt, at tilsætning af Am_2SO_4 til albuminatets opløsning i NH_3 paany frembringer fældning, skyldes det udsaltningen. Vi har allerede tidligere gjort bekendtskab med dette albuminat nemlig under histonerne. Jeg omtalte der, at denne substans slæbtes med histonerne som en forurensning, og at den kunde fjernes ved tilsætning af 20 % Am_2SO_4 -opløsning.

Endelig undersøgtes albuminatets sammensætning. Det indeholdt intet eller saagodtsom intet phosphor og havde en kvælstofgehalt af 16,59 %.

Efter endt saltsyreextraktion var der tilbage en uopløselig rest, der ikke yderligere blev angrebet af saltsyre. Denne rest kunde let opløses i fortyndet alkali og paany udfældes af eddikesyre. Ogsaa dette bundfald gav opløst i alkali en voluminøs fældning ved 20. Substansen gav æggehvide-reaktioner og var et *nucleïn*. Den gav ved digestion med mavesaft en uopløselig rest, et nyt *nucleïn*, fattigere paa æggehvide og indeholdt saavel phosphor som xanthinbaser. Det samme *nucleïn* opstaar ved digestion af proteïdet selv. Er proteïdet *opløst* i saltsyren, dannes der ved digestion intet *nucleïn*. (Et foreløbigt forsøg viste, at der efter digestionen ikke fandtes albumoser men kun ægte pepton.)

Den uopløselige rest efter behandling med HCl opløstes i alkali og udfældtes med $\bar{A}$. Fældningen udvaskedes med vand, alkohol og æther. I præparatet udførtes P-analyser, der viste en P-gehalt af 2,49 og 2,69 % — i gennemsnit 2,59 % P. N-gehalten var 16,58 %. Sammenlignes disse værdier med dem, jeg fandt for alkaliextraktet af proteïdet, viser overensstemmelsen sig straks. Her fandtes 2,59 % P, hist 2,24 %. Nucleïnet er nemlig let opløselig i NaOH, albuminatet tungere løseligt. Ved ekstraktion med meget fortyndet alkali, faar man derfor væsentlig nucleïnet i opløsning, medens omvendt ekstraktion med saltsyre opløser albuminatet og lader nucleïnet tilbage. Alkaliextraktet er dog ikke fuldstændig frit for albuminat, (hvad ogsaa P-analyserne antyder). En paafølgende ekstraktion med HCl (paa $\bar{A}$ -fældning deraf) ekstraherer smaa mængder albuminat, som paavistes ved biuret-reaktionen.

Det er os fremdeles intet paafaldende i, at analyserne paa 20 % Am_2SO_4 -fældningen af proteïdet viser de

samme værdier som $\bar{A}$ -fældningen selv, idet jo saavel albuminatet som nucleinet fældes ved 20.

Huiskamp har endvidere paavist, at CaCl_2 -fældning af proteidet viser de samme værdier, som $\bar{A}$ -fældningen. En undersøgelse viste, at saavel albuminatet som nucleinet fældes ved CaCl_2 , naar de er opløst i fortyndet alkali.

Vor undersøgelse af nucleoproteidet fra thymus er hermed ført til ende. Vi har i dette nucleoproteid lært at kjende et i høi grad labilt legeme, der overmaade let sønderdeles i et nuclein og et albuminat. Dets sammensætning minder ikke saa lidet om *Lilienfelds* nucleohiston, der spaltedes til histon og nuclein.

Nucleohistonet er dog et kunstprodukt. Af ægte nucleoproteider minder det mest om *Hammarsteens* α -nucleoproteid fra pancreas. Det viser dog stor forskjel fra dette bl. a. derved, at det *ikke* giver nogen pentosereaktion.

Af phosphorgehalten kan man udlede de omtrentlige mængdeforhold af albuminat og nuclein. Proteidet indeholdt ca. 1% P, nucleinet ca. 2,5%, og albuminatet var P-frit. Følgelig bestaar proteidet af ca. 40% nuclein og ca. 60% albuminat.

Resultatet af vore undersøgelser viser saaledes, at *Malengreaus*, *Huiskamps* og mit proteid er et og samme legeme. *Malengreaus* er urent ved tilblanding af forskjellige forurensninger. Disse slæber hos *Huiskamp* med nucleohistonet. Derfor er *Malengreaus* P-værdier for α -nucleoalbumin for lave, 0,5% P, hvorimod hans β -nucleoalbumin har 4,5%; omvendt har *Huiskamp* for lave værdier for nucleohistonet, 3,7% P, medens hans proteid har 1% P. Forurensningerne udfældtes sammen med den første fæld-

ning, — hvad enten dette er proteïdet eller nucleohistonet. (Herom senere).

I det hele maa jeg slutte mig til *Malengreaus* opfatning af proteïdets sammensætning, men maa tage bestemt afstand fra ham, naar han opfatter det ene spaltningsprodukt som histon. Følgelig maa vi søge histonerne andetsteds og da først og fremst i nucleohistonet eller, om man vil i det nucleïnsure histon.

C. Om det saakaldte nucleohiston.

Det er i indledningen omtalt, at alle senere undersøgere har paavist uholdbarheden af at opretholde *Lilienfelds* nucleohiston som *et* nucleoproteïd. Alle har fundet, at det bestaar af i det mindste *to* legemer, hvoraf det ene er det i forrige afsnit omtalte nucleoproteïd.

Angaaende den anden komponent antager *Huiskamp*, at den repræsenterer det egentlige nucleohiston i *Lilienfelds* forstand. Jeg har hævdet den opfatning, at den anden komponent er et *nucleïnsurt histon*, der ved *Huiskamps* fremstillingsmaade er betydelig forurensset. Endelig har *Malengreau* i sin sidste afhandling sluttet sig til denne min opfatning, idet han har fundet fuld overensstemmelse mellem dette stof og sit *b-nucleoalbumin*.

Imidlertid er det nucleïnsure histon meget ufuldstændigt undersøgt. Jeg har i min foreløbige meddelelse ikke meddelt nogen analytiske værdier. Der mangler saaledes de vigtigste kriterier til afgjørelse af dets sammensætning.

Fremdeles foreligger der fra min side blot sparsomme antydninger angaaende det nucleinsure histons sammensætning. Jeg har i mit sidste arbejde meddelt, at det bestaar af histon og nucleinsyre, men disse substanser er blot erkjendt efter sine *kvalitative* reaktioner, uden at der er gaaet nærmere ind paa detailundersøgelser. Dette maa gøres saameget mere af den grund, som vi i det foregaaende har vist, at der fra thymus lader sig fremstille to forskellige histoner. Findes et eller begge i det nucleinsure histon? Endelig mangler der undersøgelse af en del andre spørgsmaal, som vil blive omtalt paa sin plads i undersøgelsesrækken.

Medens *Huiskamp* og *Malengreau* ekstraherer thymuskjertlerne direkte med vand, foretog jeg først en ekstraktion med 0,9% kogsaltopløsning og ekstraherede derpaa med vand. Dette er dog ingen nødvendighed, og jeg har ogsaa flere gange gaaet frem som de to førstnævnte.

I alle tilfælde betinger tilsætningen af destilleret vand¹ til søndermalede thymuskjertler en stærk opsvulming af disse; de klæber sig sammen til en stor, halvt gjennemsinnelig, slimet masse, der let kan samles paa en kolerdug. Efter 24 timer kan man iagttage, hvorledes denne store slimklump, der svømmer i den vandklare vædske, begynder at sønderdeles i mindre klumper, medens vædsken blir blaa-hvid opalescerende, og efter 48 timer finder man vædsken fuldstændig ugjennemsigtig, melket, og samtidig er en stor del af kjertelmassen gaaet i opløsning. Paa bunden af karret findes en grovfnokket graa-hvid rest, der for en stor del bestaar af bindevæv, retikuliner, uopløselige celle-

¹ I almindelighed tilsattes ogsaa nogle draaber chloroform.

bestanddele iblandet fedt o. s. v. De fedtrigeste bestanddele flyder ovenpaa vædsken. Hverken vædsken eller den uopløselige rest er nu det mindste slimet. Reaktionen er amfoter. Jeg tog sædvanlig i arbeide 500—1000 gr. thymus og ekstraherede dette med $1\frac{1}{2}$ —2 l. vand. En efterfølgende vandextraktion af resten gav godt udbytte af substans, hvorfor dette altid blev foretaget. Yderligere ekstraktioner var aldrig lønnende. Behandlede man thymus direkte med vand, var det første ekstrakt rigt paa saavel nucleoproteidet som nucleïnsurt histon, medens det andet indeholdt overveiende sidstnævnte. Tredie og fjerde ekstraktion var meget fattige paa proteid, men indeholdt relativt mere nucleïnsurt histon. Disse ekstraktioners udseende var mindre opalescerende. Femte og sjette ekstraktion var meget lidet opalescerende og indeholdt kun smaa mængder nucleïnsurt histon, som til gjengjæld var temmelig rent.

Efter 48 timer dekanteredes vædsken af og centrifugeredes 1 time i en kraftig centrifuge. Der afsatte sig under centrifugeringen et lidet bundfald af leucocyter. Efter centrifugeringen blev vædsken filtreret. Filtrationen foregik raskt, vædskens udseende forblev den hele tid uforandret. Filtratet tilsattes derpaa CaCl_2 (10 % opløsning) til 0,2 %. I enkelte meget rige ekstrakter var dette ikke nok til at fælde alt nucleïnsurt histon, hvorfor der tilsattes 0,3 % CaCl_2 . Der opstod herved konstant en overmaade rigelig, hvid fældning, der let kunde samles ved filtration eller centrifugering. Filtratet fra denne CaCl_2 -fældning var farveløst eller svagt opalescerende og gav absolut ingen fældning med CaCl_2 . Derimod gav tilsætning af eddikesyre en ny hvid fældning, der var meget mindre end den foregaaende.

Denne sidste bestod af nucleoproteidet og er udførlig omtalt i foregaaende kapitel, hvorfor vi her udelukkende har at beskæftige os med CaCl_2 -fældningen. Man kan paa to maader bringe denne i opløsning, nemlig enten ved *behandling med alkali* eller med *fortyndede neutralsaltopløsninger*.

Den første methode er anvendt af *Huiskamp*. Man opnaar herved en *langt fuldstændigere* opløsning end ved den sidstnævnte af mig anvendte, hvor blot en *mindre* del ekstraheres. Til gjengjæld er sidstnævnte methode en langt mere *elektiv* methode, der fuldstændig ekstraherer den substans, der interesserer os her, og lader forurensningerne tilbage. Ved min methode faar man derfor et farveløst eller svagt blaaligt opalescerende, men fuldstændig gjennemsigtigt filtrat, medens der efter *Huiskamp* faaes det samme ugjennemsigtige som oprindeligt. Ved gentagen behandling med neutralsaltopløsning kan man fuldstændig ekstrahere substansen. Det, der nu bliver tilbage paa filterne, bestaar af gulhvide, klæbrige masser. Disse indeholder intet *histon*. De kan opløses i fortyndet alkali og fældes atter ved tilsætning af eddikesyre og CaCl_2 . Da man nu, som senere skal vises, kan ekstrahere det nucleinsure *histon* med 2% kogsaltopløsning, kan det vanskelig antages, at der herunder er foregaaet en spaltning, hvad ogsaa de forskjellige specifikke reaktioner, der senere skal omtales, med bestemtthed modsiger. Jeg mener derfor at have grund til at antage, at metoden er at foretrække for *Huiskamps*, og har ogsaa i det følgende udelukkende benyttet den.

Forsøgsvis har jeg dog ogsaa anvendt *Malengreaus* fremstillingsmethode. Naar man halvmætter vandekstraktet fra thymus (500 gr.) med Am_2SO_4 , faar man ligeledes en rigelig, hvid fældning, medens filtratet er *ganske vandklart*.

Heraf kan sluttet, at de forurensninger, der udfældes sammen med *Huiskamps* CaCl_2 -fældning hos *Malengreau* slæbes med fældningen ved halvmætning. Dette er, som tidligere nævnt, aarsagen til, at *Malengreaus* α -nucleoalbumin faar en saa betydelig lavere P-mængde, medens *Huiskamp* til gjengjæld faar en omtrent tilsvarende for lav P-mængde i sit nucleohiston, nemlig 3,7 %.

Filtratet fra fældningen ved halvmætning blev derpaa dialyseret og tilsat 15 vol. vand, hvorved det forblev klart, og derpaa fældt med eddikesyre. Denne fældning opløstes i 500 cc. 1 % NaOH til en neutralt reagerende, svagt gulfarvet vædske. Ved paany at halvmætte med Am_2SO_4 fik man atter en *sparsom fældning*, medens hovedmængden først blev udfældt ved mætning med samme salt eller ved fortynding og fældning med eddikesyre. Mættedes opløsningen med kogsalt, fik man den sædvanlige histon-fældning, og i filtratet herfra kunde nucleinsyre paavises. Heraf fremgaar, at den substans, der kan fremstilles efter *Malengreau*, ikke er et rent præparat, men at den, trods fraktioneringen og eddikesyrefældningen, indeholder smaa forurensninger. Dette stemmer ogsaa med, hvad jeg har omtalt under gennemgaaelsen af nucleoproteidet. Jeg har fremdeles pg. 37 nævnt, at man i kogsaltextraktet finder substanser, fældbare ved $\bar{A}$, som blot kan udsaltes ved mætning med Am_2SO_4 , hvilket maa betinge en forurensning af det nucleinsure histon, fremstillet efter *Malengreau*. Desuden har jeg fundet, at eddikesyren ligesaa lidt forholder sig indifferent ligeoverfor det nucleinsure histon som overfor proteidet. Herom vil der senere blive berettet.

Det fremgaar saaledes til evidens, at hverken Huiskamps

eller Malengreaus methode egner sig til fremstilling af det nucleïnsure histon.

Tilbage staar da blot min methode: ekstraktion af CaCl_2 -fældningen med fortyndede neutralsaltopløsninger. I mit forrige arbeide benyttede jeg en 5%—10% kogsaltopløsning hertil. Ved en paafølgende dialyse opstod der i det filtrerede ekstrakt en rigelig, snehvid fældning, og der blev en substans tilbage i opløsning, der ikke kunde fældes med CaCl_2 , men derimod med eddikesyre. Den substans, der udfældtes ved dialysen, og som udgjorde den overveiende mængde, blev derpaa atter opløst i 5—10% NaCl , og af denne opløsning blev histonet fremstillet enten ved at mætte med kogsalt eller ved at tilsætte fortyndet saltsyre. Ved mætning med kogsalt udfældtes histonet, medens nucleïnsyren forblev i opløsning; ved saltsyrebehandlingen var det omvendte tilfældet.

Ved at gjentage disse forsøg, har jeg atter konstateret rigtigheden deraf. Desuden har jeg kompletteret nogle manglende detailler. Ved dialysen blev som sagt en ringe rest tilbage i opløsningen. Ved nærmere at undersøge denne rest, viste den sig at bestaa af nucleïnsurt histon, der ikke var fældet ved dialysen. Den udfældtes med eddikesyre, opløstes i yderst fortyndet NaOH og kunde heraf udfældes med CaCl_2 . Fremdeles blev den ved mætning med kogsalt spaltet i histon og nucleïnsyre. Der fandtes i det hele ingen andre paaviselige æggehvide-substanser i kogsaltextraktet fra kalkfældningen end netop det nucleïnsure histon. Fremdeles var det af interesse at udforske, i hvilken form det nucleïnsure histon udfældtes ved dialysen. Det viste sig ved undersøgelse deraf at være *natriumsaltet*, fuldstændig frit for kalk, der var udfældt.

Som følge heraf kunde denne fældning opløses i *destilleret vand alene uden anvendelse af kogsalt*. Tilsattes hertil kogsalt til 0,9—1 %, indtraadte atter delvis fældning, let opløselig ved yderligere kogsalttilsætning. CaCl_2 frembragte ogsaa en kvantitativ udfældning, der let kunde løses af en fortyndet kogsaltopløsning. Ved gentagne gange at udfælde substansen afvejlende med CaCl_2 og NaCl , dialysere etc., fik jeg opløsninger af utvilsom renhed, der undersøgtes i forskellige retninger.

Saaledes undersøgtes forholdet til neutralsalte: Ved mætning med NaCl opstod der et ganske rigeligt bundfald.

Ved mætning med MgSO_4 opstod ingen fældning. Vædsken forblev uforandret, naar undtages, at den blev mere tykflydende, syruplicnende.

Ved mætning med Am_2SO_4 opstod ligeledes bundfald. Det er dog let at paavise en væsensforskjel mellem fældningen ved kogsalt og ved ammoniumsulphat. Førstnævnte salt *spalter* forbindelsen og udfælder den ene komponent, medens Am_2SO_4 udfælder substansen med uforandrede egenskaber. Fældningen kan let opløses i vand, fældes med CaCl_2 , spaltes med NaCl og *saltsyre*, medens kogsaltfældningen, opløst i vand, ikke fældes af mineralsyrer eller CaCl_2 men derimod af NH_3 .

Jeg gik derpaa til den nærmere undersøgelse af kogsaltets forhold. Til den vandige opløsning af alkalisaltet, der altsaa *ikke* indeholdt frit NaCl , tilsattes vexlende mængder mættet kogsaltopløsning. Ved en kogsaltgehalt af 0,25 % begyndte en svag opalescens at indtræde; denne blev stærkere ved 0,50 % NaCl , hvor der observeredes en begyndende fældning, som naaede sit maximum ved 0,75—0,80 % NaCl . Fældningen var dog som nævnt *ikke* kvanti-

tativ. Dens udseende er glasagtig, gennemskinnelig og konsistensen seig, syruplignende. Naar den har afsat sig som en gele paa bunden af glasset, kan vædsken fuldstændig hældes af. Naar der nu tilsættes yderligere kogsaltopløsning, blev fældningen uforandret til 1,00% NaCl. Ved 1,25% NaCl begyndte bundfaldet at opløses. Yderligere tilsætning bevirkede en større og større opklaring. Ved 1,75% NaCl var vædsken svagt opalescerende, og ved 2% NaCl i vædsken var atter opløsningen fuldstændig vandklar. Gik man nu den omvendte vei med en 2% NaCl-opløsning af substansen som udgangspunkt og formindskede NaCl-gehalten ved tilsætning af vand, kunde man mindske kogsaltgehalten til 1,50% uden at nogen forandring indtraadte. Ved 1,46% NaCl begyndte opalescensen meget svagt, blev sterkere ved 1,43%, og fældning fremkom ved 1,40% NaCl. Tilsættes yderligere mættet kogsaltopløsning til det nucleïnsure histon, opløst i 2% NaCl, forblev opløsningen klar, indtil man naaede 15% NaCl, (46 ccm. mættet kogsaltopløsning paa 100 ccm.), hvor opalescensen atter begyndte. Ved 18% NaCl var fældningen kvantitativ. I filtratet herfra fik man først ved mætning med salt atter en sidste fældning.

Ved fraktionering med Am_2SO_4 -opløsning blev fældningsgrænserne for dette salt bestemt. Af de talrige forsøg, der udførtes, hidsættes et eksempel:

1 cc. opløsning + 4 cc. vand + 5 cc. Am_2SO_4 -opl. : klar.

1 - » + 3 - » + 6 - » : »

1 - » + 2 - » + 7 - » : » ,

efter længere tids henstand svag opalescens.

1 cc. opløsning + 1,5 cc. vand + 7,5 cc. Am_2SO_4 -opl. :
svag opalescens.

1 cc. opløsning + 1 cc. vand + 8 cc. Am_2SO_4 -opl. : tydelig opalescens, begyndende fældning.

1 cc. opløsning + 0 cc. vand + 9 cc. Am_2SO_4 -opl. : fældning; filtratet herfra giver ingen biuretreaktion.

Fældningsgrænserne for ammoniumsulphat-opløsning ligger saaledes mellem 70 og 90.

For muligens at finde holdepunkter til forklaring af neutralsaltenes saa forskellige forhold, undersøgte jeg nogle andre salte. Jeg fandt da for *sulphaterne*, at Na_2SO_4 ikke bevirkede nogen spaltning: Ved mætning med saltet forblev vædsken uforandret vandklar. Derimod spaltede saavel alkalikloriderne KCl og NaCl som *nitraterne* NaNO_3 og KNO_3 forbindelsen fuldstændig.

Gik jeg imidlertid over til *ammoniumsallene*, formaaede ingen af disse at spalte. Ved mætning af opløsningen med AmCl forblev vædsken klar. Det er vanskeligt at forstaa, hvorfor nogle af disse neutralsalte som NaCl skal spalte det nucleïnsure histon, medens andre som Na_2SO_4 er absolut indifferente. Eller hvorledes skal det forklares, at kogsalt spalter forbindelsen og fælder histonet, medens Am_2SO_4 udfælder substansen med uforandrede egenskaber, tiltrods for at baade NaCl og Am_2SO_4 fælder histonet, men *ikke* en opløsning af nucleïnsyren. Forholdet kan derfor *ikke* betinges af en omsætning af saltene (det nucleïnsure histon med NaCl) med følgende udfældning af det uopløselige salt.

Med alt muligt forbehold vil jeg blot gjøre opmærksom paa en sag, som maaske kan fortjene nærmere at paaagtes.

Sammenligner man de salte, der spalter det nucleïnsure histon med dem, som ikke gjør dette, er de først-

nævnte udelukkende salte af de *enværdige* syrer med alkalierne, medens baade de *flerværdige* syrerers alkalisaltes og alle NH_3 -salte hører til den sidstnævnte kategori. Efter dissociationsteorien er de *enværdige* syrer og deres salte i langt høiere grad dissocierede end de flerværdige og ligeledes af baserne de faste alkalier meget mere end ammoniak. Hvorvidt dette kan staa i forbindelse med spaltningen af det nucleïnsure histon, faar fremtiden vise. Enkelte omstændigheder taler dog *mod*, at dissociationen spiller nogen rolle. At indgaa nærmere herpaa vil føre os for vidt.

Hvad jordalkaliernes og de tunge metalleres salte angaar, henviser jeg i almindelighed til *Huiskamp*, der indgaaende har behandlet dette spørgsmaal men rigtignok paa urene substanser. De tunge metalsalte giver uopløselige fældninger. *Jordalkalierne*, særlig CaCl_2 , fælder kvantitativt. Fældningens udseende er hvid, men den afsætter sig snart paa glassets bund som en gjennemsigtig, syruplignende eller geleagtig masse, saa at den overstaaende vædske let kan afdekanteres fuldstændig¹. Denne fældning er meget let opløselig i fortyndede neutralsaltopløsninger, f. ex. 2 % NaCl -opløsning, og substansen findes nu i opløsning som *alkali-salt*, hvorfor man ved fortynding med det lige volum vand faar substansen delvis udfældt. Tilsættes denne fældning destilleret vand, gaar alkaliforbindelsen i opløsning. Ved tilsætning af de forskjellige metalsalte udfældes det respektive metalsalt af nucleïnsurt histon, medens syren forbinder sig med dettes alkali.

¹ Den oprindelige urene [fældning ved CaCl_2 forholder sig ikke saaledes.

Det nucleïnsure histons forhold til syrer og alkalier.

Det nucleïnsure histon er selv uopløseligt i vand, derimod er dets *alkali-* og *ammoniaksalte* let opløselige. Disse er ogsaa de eneste opløselige salte heraf, som jeg kjender. I vandextraktet fra thymus findes netop alkalisaltene. Det optræder altsaa som en *syre*, om det end, som senere vil sees, efter sin konstitution selv er et salt. Det er vistnok derfor rigtigere at opfatte det som et *surt* salt. Den alkaliforbindelse, der foreligger i vandextraktet, ligesom den, vi kan fremstille ved omsætning af kalksaltet med kogsalt, er dog heller ikke den *neutrale* forbindelse, da den reagerer tydelig *surt* mod lacmuspapir saavel i opløsning som særlig, naar man presser lacmuspapiret mod en fugtig fældning deraf. Det er dog meget let at fremstille det neutrale salt ved tilsætning af et lidet overskud af alkali. Denne neutrale forbindelse er *ikke* undersøgt.

Tilsættes yderligere alkali, kan ingen forandring iagtages. Først naar man kommer op til en alkaligehalt paa 15—20 %, indtræder en blakning og senere en udfældning af histon.

En ammoniaktilsætning vil ikke betinge nogen synlig forandring af det nucleïnsure histon, førend man kommer op til 5—6 % NH_3 i vædsken; da indtræder en afspaltning og udfældning af histon. Der skal saaledes en mindre mængde NH_3 end NaOH til for at fremkalde fældning. Denne modsigelse er blot tilsyneladende. Histonet spaltes nemlig ikke ved den grad af alkaliescens, ved hvilken det udfældes. Naar man tilsætter mere alkali, spaltes visse- lig histonet, men fældes ikke; først ved stort overskud af alkali sker der (som jeg har vist i mit første histonarbeide)

en udfældning heraf. Derimod er histonet tungere opløseligt i ammoniak, hvorfor det strax udfældes, naar det er afspaltet.

Tilsættes en opløsning af nucleïnsurt histon nogle draaber barytvand, indtræder der en rigelig, hvid fældning. Denne er meget tungt opløselig saavel i syrer som i alkalier. Ganske paa samme maade forholder kalkvand sig. Der er saaledes her foregaaet en anden reaktion end ved tilsætning af de resp. salte. Undersøger man filtratet fra denne fældning, saa giver dette en sterk biuretreaktion og ingen fældning, hverken ved eddikesyre, mineralsyre eller ammoniak. Dette sidste forhold, der til en begyndelse var mig noksaa uforstaaeligt, forklaredes ved at *neutralisere* resp. surgjøre filtratet før NH_3 -tilsætningen; der opstod nemlig en rigelig fældning, naar man gjorde filtratet ammoniakalsk. Der fandtes følgelig *histon* opløst af barytvandet, af hvilken opløsning det ikke kunde udfældes med NH_3 direkte. Baryt- og kalkvandet havde *spaltet* det nucleïnsure histon. Det havde da sin interesse at undersøge, om barytfældningen bestod af ren nucleïnsyre. Saa var dog ikke tilfældet, da fældningen gav endog en ganske sterk biuretreaktion. Ved imidlertid at forandre forsøgsanordningen derhen, at jeg lod den opløsning, der indeholdt det nucleïnsure histon, dryppe ned i barytvand, fik jeg en fuldstændig sønderdeling; *alt histon var i opløsningen, og hele fældningen bestod af ren nucleïnsyre*. Vi har saaledes i baryt (og kalk) fundet et middel til at spalte det nucleïnsure histon.

I virkeligheden er dette ikke noget nyt. *Kossel* og *Neumann*¹ har i sin tid fremstillet sin thymusnucleïnsyre

¹ Berichte d. deutschen chem. Zeitschrift. Bd. 27, pg. 2215.

ved at udfælde den som et *basisk barytsalt*. Det basiske salt omsættes derpaa med eddikesyre til det letopløselige sure barytsalt. Min barytfældning forholdt sig fuldstændig ligedan: Fældningen kunde udvaskes med vand uden at den opløste sig, men tilsætning af vand, der var gjort svag sur med eddikesyre, opløste fældningen med lethed.

Leder man *kulsyre* gennem en opløsning af nucleïn-surt histon eller rettere sagt dets alkaliforbindelse, kan man efter længere tids forløb iagttagelse, at en ikke ringe del af substansen udfældes. Denne fældning er dog meget ufuldstændig, og den sker, som sagt, ganske langsomt.

Tilsættes nogle draaber fortyndet *eddikesyre* til en nucleïn-sur histon-opløsning, indtræder der en finfnokket, hvid, kvantitativ fældning, der er uopløselig i vand, men som let kan opløses til en neutral vædske ved forsigtig alkalitilsætning. Af denne opløsning kan atter det nucleïn-sure histon udfældes ved eddikesyre eller ved CaCl_2 . Udfælder man imidlertid vor substans *gjentagne gange* med eddikesyre, forandres den ganske merkbart. Fældningen er fremdeles yderst let opløselig i spor af alkali til en neutral opløsning, der giver en kvantitativ fældning med CaCl_2 . Men denne CaCl_2 -fældning er *meget tungt opløselig i fortyndede neutralsalt-opløsninger*. Den svæller op til en voluminøs, gjennemsigtig, geleagtig masse. Desuden faar man ved mætning med kogsalt ganske vist en fældning, men denne indeholder baade histonet og nucleïnsyren; kun meget ringe del nucleïnsyre gaar over i filtratet. *Der sker saaledes en ufuldstændig spaltning af forbindelsen*, der altsaa er gaaet over fra en dissociérbar til en fastere forbindelse. Behandler man det nucleïn-sure histon med en mere koncentreret eddikesyre, faar man ogsaa da en fæld-

ning, men samtidig sker der en afspaltning af *histon*. Denne afspaltning er meget ufuldstændig.

Mineralsyren spalter forbindelsen. Tilsætning af HCl til 0,3 % frembringer et hvidt, ostet bundfald, bestaaende af nucleïnsyre. Over denne fældning er vædsken opalescerende, melket. Ved filtration faar man vanskelig en klar vædske; ved længere tids henstand opnaaes dette lettere. Nucleïnsyrefældningen indeholder som regel lidt *histon*, der kan fjernes ved opløsning i alkali og ny fældning med HCl. Forøvrigt har jeg i overensstemmelse med, hvad *Schmiedeberg*¹ anfører for nucleïnsurt protamin, fundet ved alle spaltningforsøg, at nucleïnsyren giver noget vanskeligere slip paa den sidste rest *histon* end paa det øvrige. Tilsætter man forsigtig smaa mængder mineralsyre til en opløsning af nucleïnsurt *histon*, faar man substansen udfældt uforandret som saadan.

Det har sin interesse at undersøge det nucleïnsure *histons* forhold til *alkohol*. Alkoholtilsætning til en vandig opløsning af alkalisaltet frembringer *ingensomhelst* fældning, — opløsningen forbliver klar og farveløs. Tilsætning af nogle draaber kogsaltopløsning fremkalder nu fældning, der ved passende tilsætning bliver *kvantitativ*. Denne fældning er let opløselig i vand og giver da alle reaktioner paa nucleïnsurt *histon*, der saaledes er udfældt med *uforandrede egenskaber*.

Ganske anderledes forholder sagen sig, hvis man gaar ud fra en opløsning, der indeholder *mere NaCl*: f. ex. 5 %. I dette tilfælde faar man ogsaa en fældning ved tilsætning af det lige volum *alkohol*; men denne bestaar *ikke*

¹ Archiv for experiment. Path. u. Pharm. Bd. 37, 43.

af den uforandrede substans, men af nucleïnsyre sammen med noget histon; det allermeste histon befinder sig opløst i alkoholen og kan udfældes med NH_3 (bedst ved først at forjage alkoholen). Ved at opløse fældningen i vand ved hjælp af en smule alkali, kan man paany udfælde nucleïnsyren ved alkohol noget renere end før. Men man maa dog foretage mange rensninger paa denne maade, førend man faar et rent præparat, frit for histon.

Ligesom man uden risiko kan udfælde det nucleïnsure histon med alkohol af en NaCl -fattig opløsning, saaledes kan man selvfølgelig ogsaa behandle CaCl_2 -fældningen med alkohol uden mindste skade. Jeg har havt saadanne præparater staaende under alkohol i længere tid, uden at dekomposition er indtraadt. Substansen har fremdeles været letopløselig i 2% NaCl etc.

Hvis man derimod lader alkoholbehandlingen følges af en *ætherbehandling*, hvorved substansen kan fremstilles som et fint, hvidt pulver, bliver saavel kalk- som natriumforbindelsen *uopløselig*.

En opløsning af nucleïnsurt histon koagulerer ved kogning, hvis kogsalt er tilstede. Derimod indtræder ingen koagulation, hvis dette salt mangler.

Det nucleïnsure histon giver æggehvidens sædvanlige farvereaktioner.

Efter de erfaringer om det nucleïnsure histons reaktion, som i det foregaaende er omtalt, anser jeg min dialyseringsmethode for unødigt kompliceret til fremstilling af substansen. Endvidere anser jeg opløsningen af CaCl_2 -fældningen i 5—10% NaCl -opløsning for mindre heldig. Man kan ligesaagodt eller endog bedre benytte en 2% NaCl -opløsning. Ved ekstraktion af CaCl_2 -fældningen faar

man ganske vist et filtrat, der er meget rigt paa nucleïn surt histon, men samtidig gaar der igjennem en del forurensninger, der betinger en opalescens i filtratet. Ved gjentagne ganges filtration gjennem samme filtrum bliver filtratet tilslut vandklart og svagt blaaligt opalescerende: men denne filtration gaar meget langsomt, tager flere dage, og i løbet af denne tid kan fældningen allerede have begyndt at antage en mistænkelig lugt. Den oprindelige kalkfældning raadner nemlig meget hurtig — i modsætning til det rene nucleïnsure histon. Øger man saltgehalten, hindres forraadnelsen, og filtrationen gaar langt bedre for sig.

Denne vanskelighed kan omgaaes paa to maader: enten vælger man et andet salt f. ex. Am_2SO_4 til opløsning af den oprindelige kalkfældning, eller man kan behandle fældningen *først med alkohol*, førend man ekstraherer den med 2⁰/₀ NaCl. Efter den første methode sætter man til fældningen ca. 300 ccm. halvmættet Am_2SO_4 -opløsning og gnider den hermed godt ud i en rivskaal. Blandingen, der er seig, tykflydende og graahvid, kan henstaa ubegrænset tid uden mindste skade. Ved filtrationen, der gaar raskt for sig, faar man et vandklart filtrat, af hvilket man udfælder det nucleïnsure histon ved mætning med salt. Fældningen opløses i vand (ca. 1 l.) og fældes med CaCl_2 , hvorpaa kalkfældningen opløses i 2⁰/₀ NaCl-opløsning og behandles videre efter næste methode. Denne er langt bekvemmere og elegantere. Man samler kalkfældningen fra vandextraktet ved centrifugering eller filtration og udvasker derpaa fældningen med alkohol, filtrerer og presser den mellem filterpapir. (Alkoholen ekstraherer en stor del forurensninger. Ved at tilsætte vand til ekstraktet opstaar en sterk hvid opalescens og fældning.) Derpaa river man residuet fint med

50—100 ccm. 2 % NaCl-opløsning og lader blandingen henstaa nogle timer, for at kogsaltet skal faa indvirke. Nu filtreres der. Efter nogle timer faaes et vandklart filtrat, rigt paa nucleïnsurt histon som alkalisalt. Derpaa fortyndes med vand (ca. 1 l.) og der tilsættes CaCl_2 til 0.2 %, hvorved man faar en rigelig fældning af kalksaltet. Denne er dog ikke fuldstændig kvantitativ, da smaa mængder holdes tilbage i opløsningen af det tilstedeværende kogsalt. Kalkfældningen opløses nu i 2 % NaCl (50—100 ccm.) og filtreres. Filtratet tilsættes det lige volum destilleret vand, hvorved der opstaar en rigelig fældning af *Na-saltet*. Vædsken dekanteres af, og fældningen opløses i 1 l. destilleret vand og fældes paany med CaCl_2 . Yderligere rensning lønner sig ikke. Substansen blev for analytiske øiemed udvasket med alkohol og æther, hvorved der resulterede et fint, snehvidt pulver, der ikke var hygroskopisk. Blev den igjen opløst i 2 % NaCl etc. og undersøgt paa sine reaktioner, faldt alle disse ud som tidligere beskrevet.

Efter disse to metoder fremstillede jeg to analysepræparater, hvoraf det, der fremstilledes efter Am_2SO_4 -metoden, yderligere udfældtes to gange som Ca-salt.

Endelig fremstilledes et tredie præparat efter kogsaltmetoden, hvor vandextraktionen paa thymus foregik ved en temperatur af 0° for at udelukke muligheden af enhver fermentation.

Paa disse tre præparater udførtes fuldstændige elementaranalyser (S bestemtes *ikke*)¹, og resultatet vil fremgaa af nedenstaaende værdier.

¹ Men paavistes kvalitativt.

	C	H	N	P	Ca	Aske
Præp. nr. I.	43,60 0/0	5,70 0/0	16,76 0/0	5,49 0/0	1,59 0/0	8,64 0/0
— - II.	43,92 -	5,35 -	16,81 -	5,35 -	»	8,76 -
— - III.	43,54 -	5,76 -	17,05 -	5,15 -	1,70 -	8,31 -
I gennemsn.	43,69 0/0	5,60 0/0	16,87 0/0	5,33 0/0	1,65 0/0	8,57 0/0 ¹

Af analyserne fremgaar, at kalksaltet af det nucleïnsure histon har en konstant sammensætning, der ikke vexler ved forandringer i fremstillingsmaaden. Specielt er at merke, at der ikke sker nogen ved analysen paaaviselig *fermentation* ved almindelig værelsetemperatur. Det nucleïnsure histon er saaledes et nucleoproteïd *sui generis*, der udmerker sig fremfor alt ved sin overordentlig høje phosphorgehalt, der er større end noget andet undersøgt genuint proteïds.

Sammenligner man resultatet af mine analyser med *Huiskamps* og *Malengreaus* værdier, finder man en betydelig forskjel.

	C	H	N	P	Ca
<i>Huiskamp</i>	45,01 0/0	6,49 0/0	16,96 0/0	3,72 0/0	1,33 0/0
<i>Bang</i>	43,69 -	5,60 -	16,87 -	5,33 -	1,65 -
<i>Malengreau</i>	»	»	»	4,50 -	»

Den mindste differens mellem *Huiskamps* og mine værdier findes i N-analyserne (hvilket intet siger) og i Ca-værdierne, medens den største differens findes i C (og H) samt P.

Heraf fremgaar, at de omtalte forurensninger i *Huiskamps* proteïd er fattigere paa P, rigere paa C, samt indeholder omtrent samme Ca-gehalt som det nucleïnsure histon. De vil derfor i sammensætning nærme sig nucleo-

¹ Det er vistnok ikke korrekt at omregne værdierne paa askefri substans, da den meste aske indgaar i substansens molekyl som phosphorsyre og kalk.

proteïdet. Heller ikke *Malengreaus* proteïd kan gjøre fordring paa at regnes som *ren* substans, da dets P-gehalt er for lav, om det end er langt renere end *Huiskamps*.

Mangelen paa S-analyser gjør sig beklageligt gjældende, naar man skal opstille den empiriske formel. Af de foreliggende data kan dog sees, at der paa 88 atomer C, 29 atomer N og 4 atomer P findes 1 atom Ca. Nu indeholder den foreliggende nucleïnsyre — ligesom alle andre — 4 atomer P. *Følgelig findes der paa et molekyl nucleïnsyre i vor substans ét atom Ca.* Man maa derfor tænke sig, at kalken staar i et bestemt forhold til nucleïnsyren: En del af dens affiniteter er mættet af æggehvidebasen histon, en anden er bundet til calcium, og da kalksaltet endnu reagerer surt, maa endelig en del være umættet. *Vi kan saaledes drage den vigtige slutning, at dette nucleoproteïds vigtigste egenskaber er afhængige af dets nucleïnsyre.*

Det kan ogsaa tænkes, at *flere molekyler* nucleïnsyre indgaar i det nucleïnsure histons molekyl. Svovlanalyserne kan her bringe oplysninger. (S forekommer sikkert i større mængder, end *Huiskamp* har fundet).

Naar disse analyser foreligger, kan man ogsaa med gode udsigter gaa ind paa det interessante spørgsmaal om histonets molekylarvægt. Denne synes efter de her foreliggende data at maatte være lavere end de almindelige æggehvidelegemers.

Vi har i et tidligere kapitel vist, at thymus indeholder *to* histoner. Da nu nucleoproteïdet ikke indeholder histon, bliver spørgsmaalet dette: Indeholder det nucleïnsure histon *et* eller *to* histoner? Besvarelsen heraf har selvfølgelig stor betydning for forstaaelsen af dets kon-

stitution. Det maa endog blive gjenstand for undersøgelse, om der eventuelt ikke foreligger *to proteïder*, hvert med sit histon og hvert med sin særegne nucleïnsyre. Jeg har i min forrige afhandling allerede antydnet muligheden af *to* saadanne nucleïnsyrer. Spaltningsforsøgene har givet holdpunkter for besvarelse af dette spørgsmaal. Vi skal derfor gaa over til omtalen af disse.

I det foregaaende er vist, hvorledes man kan spalte det nucleïnsure histon paa flere forskellige maader: ved baryt, saltsyre, alkohol og kogsalt, samt mætning med visse neutralsalte.

Ved mine spaltningsforsøg har jeg fulgt min gamle methode: mætning med kogsalt.

D. Undersøgelser over spaltningen af det nucleïnsure histon.

Tilsætter man kogsalt i substans til en opløsning af det nucleïnsure histon, bliver vædsken allerede før mætning tykflydende, syruplignende og derpaa halv gjennemsigtig. Opløsningen minder ikke lidet om en emulsion af meget fint fordelt pulver i planteslim. Efter nogen tids forløb bliver vædsken tyndflydende, og samtidig afsættes et rigeligt hvidt, finfnokket bundfald, der kan samles ved filtrering. Filtratet giver fremdeles biuretreaktion. Yderligere tilsætning af kogsalt giver et nyt bundfald, og filtratet herfra kan ofte ved yderligere tilsætning og rystning give et tredie. Men selv om opløsningen *fuldstændig* mættedes med kogsalt,

gav dog filtratet i alle de talrige forsøg, jeg i den senere tid har udført, endnu biuretreaktion med vakker rød farve. Intensiteten synes at variere noget i de forskellige forsøg. Denne iagttagelse stemmer ikke med mine foregaaende forsøg, hvor jeg ikke fandt nogen biuretreaktion i filtratet fra kogsaltfældningen efter mætning. Jeg kan ikke give nogen forklaring heraf. Det laa nær at antage, at jeg ved de sidste forsøg ikke har opnaaet en fuldstændig mætning, da denne foregaar meget langsomt; men dette er ikke tilfældet. Jeg har nemlig gjentagne gange ladet mine filtrater fordampe ved vanlig temperatur til udkrystallisation af NaCl, uden at biuretreaktionen forsvandt.¹ Paa den anden side kunde det tænkes, at jeg tidligere havde overseet biuretreaktion. Dog er dette i og for sig ikke sandsynligt, og desuden har *Malengreau*, der har gjentaget mine forsøg, konstateret rigtigheden af min tidligere angivelse. Han siger saaledes (*La cellule* Tome XX, page 299): «Si l'on attague la nucleoalbumine B par le NaCl à saturation, un précipité se forme rapidement composé exclusivement d'histone. *Il ne reste en solution aucun principe albumineux.* Le filtrat . . . absence de la réaction du biuret décelée — et l'on est autorisé à nier avec *Bang* l'existence d'une leuconucleïn.»

Man kunde fremdeles formode, at substansen var mindre godt rensset ved min nye methode, eller at dialysen, der før anvendtes, havde fjernet en forurensning, som ellers vanskelig kunde bortskaffes; men dette er heller ikke tilfældet. Jeg har endvidere haft opmærksomheden henvendt paa spørgsmaalet om, hvorvidt thymuskjertelens alder

¹ Ligeledes har jeg opløst kalksaltet i mættet kogsaltopløsning: filtratet gav biuretreaktionen.

muligvis skulde spille en rolle i denne henseende, men intet fundet, der kunde tale herfor. Endelig var der en mulighed for, at der under fremstillingen kunde ske en *autodigestion* eller i det hele en fermentation af histonet; men selv om man arbejdede med *afkølede* opløsninger, fik man samme resultat. Jeg maa derfor nøie mig med at fremhæve sagen uden i dette øieblik at kunne give nogen tilfredsstillende forklaring.¹

Spørgsmaalet bliver da, om den substans, som giver biuretreaktionen, findes i forbindelse med nucleïnsyren som leuconucleïn. Saa er ikke tilfælde. Substansen findes visselig bundet paa samme saltagtige maade som histonet. Det fældes ikke sammen med histonet, fordi det ikke kan *udsaltes* af kogsalt. Som bevis for at det findes *frit* i kogsaltfiltratet, kan anføres, at substansen afspaltes ved behandling af nucleïnsurt histon med HCl og baryt. Da den saaledes findes bundet paa lignende maade som histonet, ser jeg ingen grund til at forandre min tidligere opfatning angaaende den oprindelige forbindelses natur.

Denne substans er ikke selv noget almindeligt histon. Af det alkoholiske filtrat efter nucleïnsyrefældningen fremstilledes substansen ved fældning med æther. Denne gav opløst i vand følgende reaktioner: Ved mætning med kogsalt opstod *ingen* fældning. Ved mætning med Am_2SO_4 udfældtes substansen som oljeagtige draaber, der svømmer ovenpaa vædsken. Alkohol fælder ikke — heller ikke alkohol og NH_3 og saa meget mindre NH_3 alene. HNO_3 forholdt sig negativ. Alkaloidreagenserne forholder sig tvilsomme. Substansen er saaledes sandsynligvis hverken et *protamin* eller *histon*.

¹ I mine første «Bemerkungen über das Nucleohiston» findes dog det samme forhold beskrevet.

Det er uvist, hvorvidt substansen er *parahiston*. Det nucleïnsure histon undersøgtes nemlig efter *Fleroff* paa parahiston med tvilsomt resultat. — Jeg tænker senere at komme tilbage hertil.

Fraseet denne substans, som jeg vil betegne med X, faar vi, som tidligere vist, ved mætning med kogsalt en fældning af histon og et filtrat, der indeholder nucleïnsyre.

Vi vil begynde med *histonfældningen*. Ved undersøgelsen af denne er det vigtigt strax at tage den i arbeide. Hele fældningen opløser sig da i vand til en klar vædske. Men allerede efter kortere tids henstand under kogsaltopløsning bliver histonet tungere opløseligt, og efter længere tid — nogle dage — fuldstændig uopløselig i vand og i fortyndede syrer. Det samme er forøvrigt tilfælde med histon, fremstillet af thymus ved saltsyreextraktion og udfældning med NaCl.

Det var meget let at vise, at histonfældningen bestod af 2 histoner, *a*- og *b*-histonet, hvis fældningsgrænser og øvrige reaktioner faldt sammen med de to histoner, der tidligere er beskrevet fra saltsyreextrakter af thymus eller *Lilienfelds* nucleohiston. Desværre kan jeg ikke anføre analyser af disse histoner, da en større mængde, fremstillet til dette øiemed, gik tabt. Fremdeles kunde det vises, at fældningen *kun* bestod af histon. De æggehvidesubstanser, der indgaar i det nucleïnsure histon, er saaledes histon *a*, histon *b* og sandsynligvis substansen X.

Den anden komponent er *nucleïnsyren*. Denne kan let fremstilles paa den maade, at man tilsætter det kogsaltmættede filtrat ca. 2 volum alkohol, hvorved der opstaar en fældning bestaaende af nucleïnsyren som alkalisalt¹.

¹ Det er uøkonomisk at dialysere filtratet for alkoholtilsætningen, da nucleïnsyren er dialysabel, om end meget mindre end NaCl.

Det nucleïnsure alkali udfældes som en eneste seig, hvid klump, der med en glasstav kan løftes ud af karret. Det ligner paafaldende en mucinfældning ved eddikesyre. Denne fældning er let opløselig i vand til en klar vædske, der selvfølgelig indeholder noget kogsalt. Af denne opløsning udfældes atter alkalisaltet af nucleïnsyren med alkohol. Den falder denne gang ud mindre klumpet, oftest som en fnokket, hvid fældning, der for anden gang opløses i vand. Tilsættes hertil alkohol, indtræder *ingen* fældning, men denne opstaar, naar man tilsætter nogle draaber kogsalt-opløsning. Den fældning, man nu faar, bestaar af rent nucleïnsurt natron som en fin, hvid fældning, der ved ætherbehandling bliver et fint, snehvidt pulver, der ikke er hygroskopisk. Det nucleïnsure alkali viser følgende reaktioner: Tilsætning af fortyndet eddikesyre fremkalder ingen fældning, derimod opstaar en hvid, ostet fældning ved tilsætning af saltsyre eller mere koncentreret eddikesyre f. ex. 25 %. Tilsætning af opløsninger af kobber- og blysalte fældes med nucleïnsurt kobber (grønt) resp. bly (hvidt). Derimod fældes opløsningen ikke uden videre af kviksølv- og sølvsalte;¹ men tilsætter man foruden sølnitrat tillige *alkohol*, udfældes det nucleïnsure sølv som et gelatinøst hvidt bundfald, der langsomt svæortes af lyset. Ved berøring med organiske stoffe, f. ex. filterpapir, indtræder sværtning raskere. De lette metaller salte fælder ikke opløsningen. Mætning af en opløsning af nucleïnsurt alkali med kogsalt eller ammoniumsulphat bevirker saaledes *ingen* fældning. Tilsætter man

¹ Tilsættes kogsalt, udfældes klorsolv, hvilket viser, at det nucleïnsure alkali ikke er forurensat med klorider og derfor neppe med andre salte.

derimod desuden fortyndet eddikesyre, udfældes nucleïnsyren som et surt salt, og er $\bar{A}$ -tilsætningen tilstrækkelig, udfældes *al* nucleïnsyre. Denne omstændighed bevirkede, at jeg i mit sidste arbeide opstillede formodningen om existensen af to nucleïnsyrer. Fældningen er let-opløselig i vand til en surt reagerende opløsning, medens det nucleïnsure alkali reagerer neutralt. Mættes atter opløsningen med Am_2SO_4 , udfældes atter det sure alkalisalt fuldstændig.

Opvarmer man en opløsning af det nucleïnsure alkali til 60° , bevirker en paafølgende tilsætning af saltsyre ingen fældning. Sølvnitrat alene og i forbindelse med NH_3 giver heller ingen fældning. Koger man derimod nucleïnsyren nogen tid med 2 % HCl , faaes en klar opløsning, der giver rigelig fældning ved sølvnitrat og ammoniak. Denne opløsning reducerer ikke. At nucleïnsyren ikke desto mindre rimeligvis indeholder et kulhydrat, viser den vakre pentose-reaktion, som den giver med phloroglucin og saltsyre.

Endvidere indeholder sandsynligvis nucleïnsyren *thymine*, der paavistes ved *Kossels* sublimationsprøve. Sublimatet opløstes let i vand og gav fældning med AgNO_3 .

Endelig undersøgte jeg den fældning ved $\text{AgNO}_3 + \text{NH}_3$, der skulde indeholde purinbaserne. Sølvfældningen dekomponeredes med HCl -holdigt vand i kogning, hvorpaa vædsken filtreredes. Filtratet tilsattes derpaa forsigtig NH_3 til svag alkalisk reaktion og henstod 24 timer. Der havde da afsat sig et meget sparsomt bundfald, endskjønt der var taget en ikke ringe mængde nucleïnsyre i arbeide. Filtratet fra dette bundfald gav da ogsaa en rigelig fældning med sølvnitrat og NH_3 . Ved at undersøge NH_3 -fældningen paa murexidreaktion fik man et fuldstændigt negativt udslag. *Det indeholder saaledes ikke guanin.*

I et følgende forsøg bestemtes begge fraktioners mængde kvantitativt. Nucleïnsyren spaltedes ved kogning med 2 % HCl; baserne udfældtes med AgNO_3 og NH_3 , og fældningen dekomponeredes med 100 cc. HCl-holdigt vand. Derpaa filtreredes og til filtratet blev tilsat NH_3 til svag alkalisk reaktion, dette henstod i 24 timer. Fældningen samledes paa et filter, udvaskedes med vand og opløstes i 100 cc. fortyndet HCl. Saavel denne opløsning som filtratet fældtes derpaa med AgNO_3 og NH_3 , og fældningerne udvaskedes og veiedes. «Adenin-fraktionen» veiede 0,0930 gr., «guanin-fraktionen» 0,0163 gr. Af purinbaserne bestaar saaledes 87,35% af substanser, der tilhører «adeninfraktionen» og 12,65 % af substanser, der tilhører «guaninfraktionen». Denne sidste udkogtes med saltsyreholdigt vand, og filtratet inddampedes forsigtig med HNO_3 til tørhed, hvorved man fik en *gul* rest, der imidlertid ved NaOH-tilsætning *ikke blev rød* men strax blegnede. *Guanin forelaa saaledes heller ikke her.*

Sandsynligvis bestaar guaninfraktionen derfor af adenin, udfældt af NH_3 . Da HCl-extraktet af sølvfældningen senere viste sig at indeholde sølv, der var passeret filtret, blev i et nyt forsøg HCl-extraktet, der udgjorde 25 ccm., først behandlet med H_2S , hvorved en minimal fældning opstod. Filtratet herfra befriedes for H_2S , og der blev tilsat NH_3 til svag alkalisk reaktion. Først efter 24 timer opstod en meget ringe fældning.

Adeninfraktionen gav ingen murexidreaktion; xanthin er altsaa ikke tilstede. Ved tilsætning af picrinsyre opstod strax fældning. Derimod gav metaphosphorsyre ingen fældning, — et nyt bevis for at guanin ikke er tilstede. Hvorvidt adenin eller hypoxanthin eller begge baser foreligger, maa jeg lade staa uafgjort. Der maa imidlertid ogsaa

tages hensyn til Cytosin.¹ Før der er anstillet undersøgelse herover, kan der ikke drages nogen slutning angaaende purinbasernes natur. Saameget kan dog siges, at den foreliggende nucleïnsyre er forskjellig fra dem, der tidligere er fremstillet af thymus, da disse indeholder 50 % guanin.

Dette viser, at man saa vidt mulig *altid* bør gaa ud fra de respektive nucleoproteïder, naar man vil fremstille nucleïnsyren, og ikke fra et materiale, der indeholder flere proteïder, en regel som forøvrig allerede *Altmann* har fremholdt, men som man med urette har ladet upaaagtet.

Da jeg derpaa gik over til elementaranalysen af nucleïnsyren, valgte jeg at analysere denne som Na-saltet. Den frie nucleïnsyre kan kun fremstilles af saltet ved behandling med saltsyre, og HCl er — som *Miescher* allerede har paavist for salmonucleïnsyren — altid et meget farligt reagens.

Det viste sig fremdeles, at det nucleïnsure alkali under tørring ved 100° C. blev brunfarvet og dekomponeredes. Derimod taalte det meget vel opthedning til 50°.

Til analysen fremstilledes efter den ovenfor beskrevne methode to præparater, der tørredes til konstant vægt ved 50°. Ved derpaa at henstaa i excicator ved sædvanlig temperatur, aftog de fremdeles i vægt. Efter 14 dage havde man endnu ikke naaet konstant vægt. Dette opnaaedes først ved 17 dages henstand i excicator ved 50°. Substansen var fremdeles snehvid og nu *meget hygroskopisk*. Den havde i excicator

¹ Cytosin kan udelukkes paa grund af formelen. Adenin identificeredes senere efter alle sine reaktioner. Derimod kunde hypoxanthin udelukkes. Efter al sandsynlighed indeholder saaledes nucleïnsyren *kun* adenin, og er saaledes en *adenylsyre*.

(Anm. under korrekturen).

afgivet ca. 6 % vand. *Schmiedeberg* fandt det samme for salmonucleïnsyre.

Der udførtes paa disse to præparater elementaranalyser af C, H, N og P. Derimod bestemtes ikke Na. (En foreløbig analyse af sølvsaltet, der dog blot har en approximativ værdi, viste 22,6 % Ag, hvilket svarer til 3 atomer Ag. Sølvanalyserne skal i den nærmeste fremtid udføres i en større maalestok).

Resultatet af analyserne viser følgende oversigtstabel:

	C	H	N	P
Præp. no. 1	35,75 %	4,18 %	15,45 %	9,34 %
	»	»	»	9,30 -
Præp. no. 2	35,95 -	4,27 -	15,48 -	9,47 -
I gennemsnit	35,85 %	4,23 %	15,47 %	9,40 %

Salmonucleïnsyre, der havde samme sammensætning som en nucleïnsyre fra thymus, der er fremstillet af *Herlant*¹, har efter *Schmiedeberg*² formelen $C_{40}H_{56}N_{14}P_4O_{26}$.

Omregner man værdierne for min nucleïnsyre, faar man en formel $C_{40}H_{56.7}N_{14.8}P_{4.09}$, der saaledes stemmer ganske godt overens med den af *Schmiedeberg* opstillede, naar undtages, at min indeholder 1 atom N mere. Nogen bestemt slutning angaaende formelen er det paa grund af de faatallige analyser endnu ikke tilladt os at drage. Antager man, hvad der efter analyserne ikke er usandsynligt, at min *frie* nucleïnsyre har samme procentiske sammensætning som *Schmiedebergs*, nemlig 37,75 % C, 4,4 % H og 9,75 % P, indeholder det analyserede Na-salt 5,3 % Na. Omregnes dette med samme faktor (13,4) som tidligere, faar vi 3,09 atomer Na i saltet, hvad der jo stemmer godt overens med den foreløbige sølvanalyse.

¹ Archiv f. experiment. Path. u. Pharm. Bd. 44, pg. 148.

² Ibid. Bd. 37 og 43.

Under samme forudsætning bestaar det nucleïnsure histon af 54,5 % nucleïnsyre og 45,5 % histon.

Paa grund af de manglende S-analyser skal jeg ikke gaa ind paa en nærmere discussion af disse forhold.

Som følge af de anførte analyser kan man neppe betvile, at der ialfald bestaar et intimt slægtskab mellem salmonucleïnsyren og den foreliggende nucleïnsyre. Saaledes er utvilsomt kjernen den samme i begge, nemlig thyminsyren. Begge indeholder ogsaa et kulhydrat, der giver sig tilkjende ved pentosereaktionen, men som ikke afspaltes som sukker ved kogning med mineralsyrer. Derimod kan jeg netop paa grund af kulhydratet ikke anerkjende den konstitution, som *Schmiedeberg* har tillagt nucleïnsyren.

At min nucleïnsyre vistnok indeholder andre purinbaser end salmonucleïnsyren og thymusnucleïnsyrerne, er tidligere omtalt. Dette forhold indvirker dog mindre paa den elementare sammensætning, naar blot *mængden* er den samme.

Det vil selvfølgelig være af meget stor interesse at bestemme denne nucleïnsyres basisitet især af hensyn til det nucleïnsure histons sammensætning. Jeg har overbevist mig om, at sølvsaltet vil være særlig skikket til en bestemmelse heraf, og jeg agter i nærmeste fremtid at foretage en undersøgelse heraf. Efter en foreløbig undersøgelse at dømme, skulde nucleïnsyren være en 3- eller 4-basisk syre. Herigjennem lader sig maaske udlede vigtige data til fastsættelse af *histonernes molekylarvægt*.

Vi er i det foregaaende gaaet ud fra, at begge histoner skulde være forbundet med nucleïnsyre til *en* enkelt forbindelse. Dette er dog en vilkaarlig antagelse. Man kan nemlig

meget vel tænke sig, at der kan foreligge flere sideordnede forbindelser: nucleïnsurt α -histon og nucleïnsurt b -histon,¹ der begge fældes af CaCl_2 . Disse maa da forekomme i nogenlunde konstante mængdeforhold og have samme fraktionsgrænser. Jeg har ved hjælp af fraktionering med kogsaltopløsning søgt at afgjøre dette spørgsmål.

Som før omtalt falder fraktionsgrænserne for mættet kogsaltopløsning meget forskjellig for de to histoner, idet α -histonet udfældtes ved 25 % kogsaltopløsning, b -histonet først ved 75 %. Ved at fraktionere opløsninger af det nucleïnsure histon med mættet kogsaltopløsning begyndte opalescensen at komme ved 46, og ved 50 % var en fraktion udfældt (A). Tilsættes yderligere kogsaltopløsning til filtratet, forblev dette klart, indtil man kom til 70 %; her opstod atter en opalescens, der steg til fældning ved mætning (B). A opløstes i vand og viste sig at bestaa udelukkende af α -histon, idet histonet kunde udfældes fuldstændig ved halvmætning med Am_2SO_4 .

B-fældningen opløstes ogsaa i vand. Den viste sig at indeholde b -histon men desuden ikke ubetydelige rester af α -histon.

For at komme paa det rene med, hvorvidt der forelaa saavel et nucleïnsurt α -histon som et nucleïnsurt b -histon, blev der i et følgende forsøg til en oprindelig opløsning af nucleïnsurt histon sat lige volum kogsaltopløsning, bundfaldet frafiltreredes, og filtratet blev *dialyseret*. Da A-forbindelsen herved rimeligvis var bleven spaltet, B-forbindelsen derimod *ikke*, skulde den dialyserede vædske indeholde nucleïnsyre, nucleïnsurt b -histon og substansen X. Efter endt dialyse var der opstaaet en fældning (α), der filtreredes fra filtratet (β).

¹ Samt eventuelt et nucleïnsurt salt af substansen X.

Fældningen α var ikke opløselig i vand eller fortyndede neutralsaltopløsninger men derimod let i meget fortyndet alkali. Denne opløsning gav blot en opalescens men ingen fældning ved CaCl_2 , derimod gav baade eddikesyre og HCl fældning. Biuretreaktionen gav sterkt *positiv* udslag. Ved mætning med kogsalt opstod en fældning, der bestod af *a-histon* og *b-histon*.

Filtratet β gav ingen fældning ved CaCl_2 men derimod ved $\bar{\text{A}}$ og HCl . Ogsaa her var biuretreaktionen positiv. Ved mætning med kogsalt fik man en sparsom fældning af *b-histon*.

Substansen X fandtes baade i fældningen α og filtratet β . Nucleïnsyren fandtes ligeledes i begge fraktioner.

Af forsøget, der skal gjentages i større maalestok, fremgaar der intet, som berettiger antagelsen af en *a-* og *b-*forbindelse. Udelukket er det dog hermed ikke.¹

Endelig skal jeg med et par ord berøre spørgsmaalet om, hvorvidt det nucleïnsure histon maa ansees for at være en præformeret kemisk forbindelse eller ikke — med andre ord: træder komponenterne ud i vandextraktet som syre og base og forener sig her, eller findes allerede i cellen en forbindelse af de sure og basiske stoffe.

At det nucleïnsure histon findes som saadant i vandextraktet, anser jeg for utvilsomt, og ligeledes at der ved kogsaltmætningen sker en spaltning af denne forbindelse

¹ Endelig har jeg i det kogsaltmættede filtrat efter dialyse søgt at fremstille en eventuel forbindelse mellem nucleïnsyren og substansen X, hvad der efter mine første «Bemerkungen über das Nucleohiston» ikke var usandsynligt, men forgjæves. Nucleïnsyren fandtes her *ikke* i forbindelse med denne.

Fortsatte undersøgelser, som senere skal refereres, synes med sikkerhed at vise, at det nucleïns. histon i virkeligheden bestaar af nucleïns. *a-histon* og nucleïns. *b-histon* (Anm. under korr.)

i komponenterne, og jeg tager i dette punkt afstand fra min oprindelige anskuelse.

Hvis man til en opløsning af nucleïnsurt kali sætter histon (fremstillet ved at opløse kogsaltfældningen i vand), indtræder der en *fældning*. Den er let opløselig i ringe mængder alkali og kan atter udfældes med eddikesyre, men den giver *ingen* fældning ved CaCl_2 . Fældningen var ogsaa opløselig i 5 % NaCl og 5 % Am_2SO_4 . Ved paafølgende fortynding med vand indtraadte opalescens og senere fældning.

Ved fraktionering med Am_2SO_4 udfældtes histonet allerede ved 50. Den oprindelige forbindelse er saaledes *ikke* restitueret.

Imod dette forsøg kan imidlertid gjøres den indvending, at man ikke arbejder med de samme *mængdeforhold* af komponenterne som i den oprindelige substans. Vi ved jo ogsaa, at det nucleïnsure histon endog kan optage mere histon (*Huiskamp*).

Forsøgsanordningen blev ogsaa forandret derhen, at man mættede en opløsning af nucleïnsurt histon med kogsalt og fortyndede denne uden filtration med 10 vol. vand, hvorved fældningen atter opløstes. Til denne opløsning tilsattes eddikesyre, der udfældte de sure og basiske komponenter fuldstændig. Fældningen, der saaledes indeholdt hele den oprindelige substans, opløstes med spor af alkali til en neutralt reagerende vædske. Tilsattes hertil CaCl_2 , opstod en *opalescens*, men *ingen fældning*, og denne opalescens forsvandt *ikke* ved tilsætning af 2 % NaCl . Hvis man til opløsningen satte mættet Am_2SO_4 -opløsning, fik man fældning allerede ved halvmætning.

Heraf fremgaar, at nucleïnsyren naar den engang er

afspaltet, vistnok atter kan forbinde sig med det nucleïnsure histons basiske komponenter, men at den heraf resulterede forbindelse paa ingen maade er identisk med den oprindelige naturlige forbindelse. I det hele taget bør man vistnok være meget forsigtig med at drage slutninger angaaende de forbindelser, som opstaar, naar man til en nucleïnsyre sætter æggehvide. Der mangler endnu ethvert bevis for, at derved dannede stoffe er at betragte som nucleoproteïder. De kan vistnok ikke sammenstilles med de naturligt forekommende.

Af forsøgene fremgaar ligeledes, at det nucleïnsure histon maa antages at forekomme som saadant i selve thymuscellen, og at det i alle fald neppe dannes af sine komponenter ved overgangen i vandextraktet, — det er endvidere sandsynligt, at det forekommer i cellen som en langt mere kompliceret forbindelse. Om dennes natur ved vi imidlertid endnu intet. Paa grund af de forandringer, thymuscellerne undergaar ved ekstraktion med vand, er det dog rimeligt at antage, at det er *destilleret vand*, der bevirker *afspaltningen* af en mere kompliceret forbindelse af det nucleïnsure histon. Desuden maa vandet tænkes at sprænge den cellemembran, der omgiver cellen.

Kaster vi et blik tilbage paa de resultater, der fremgaar af dette arbeide, har de i det hele og store taget bekræftet mine tidligere fremsatte anskuelser om sammensætningen af det *Lilienfeld'ske* nucleohiston. Paa den anden side har undersøgelserne for en del modificeret opfatningen saavel af nucleoproteïdet som det nucleïnsure histon. Jeg betragter spørgsmaalet om nucleoproteïdet som væsentlig afgjort. Derimod gjenstaar der endnu vigtige spørgsmaal angaaende det nucleïnsure histon og dets sammensætning.

Imidlertid er dog det principielt vigtigste problem løst og veien anvist til besvarelsen af de øvrige spørgsmaal.

Naar nu, efter de fremlagte undersøgelser, *Lilienfelds* opfatning af thymuscellernes kemiske bestanddele maa ansees for feilagtige, falder samtidig hans bestemmelser af cellernes kvantitative sammensætning til marken. Jeg har derfor paany foretaget en bestemmelse af deres vigtigste substanser. Til sammenligning hidsættes *Lilienfelds* resultater:

	Lilienfeld.	Bang.
Vand	88,51	80,41
Faste bestanddele	11,49	19,59
Æggehvidelegemer	9,10	15,52
Nucleïnsurt histon	8,90	{ 3,15 1,08
Nucleoproteïd		
Alkoholopløselige stoffe	1,83	2,48
Aske	—	1,59

Medens saaledes *Lilienfelds* analyser angiver nucleohistonets mængde til ca. 98 % af æl æggehvide, udgjør det nucleïnsure histon efter mine analyser 20 % og nucleoproteïdet 7,0 % af den samlede æggehvidemængde, tilsammen 27 %. Resten, 73 %, udgjøres af de øvrige ukjendte bestanddele, af hvilke en meget ringe brøkdel bestaar af genuin æggehvide. Den største mængde af disse ubekjendte bestanddele er visselig gaaet i opløsning ved behandling af cellerne med vand, og befinder sig i kalkfældningen. Ved ekstraktion af denne med 2 % NaCl bliver derfor ogsaa det meste tilbage, men det indeholder *intet* histon.

Vil man derfor sammenligne *Lilienfelds* og mine værdier, maa man tage sit udgangspunkt i *histonet*, der i *Lilienfelds* analyser udgjorde ca. 11 % af den totale æggehvide. Efter phosphoranalyserne kan man efter mine bestemmelser anslaa histonmængden til 50 % af det nucleïnsure histon, altsaa

ca. 10 % histon af den totale æggehvide. Men desuden er det albuminat, af hvilket nucleoproteïdet afspaltes, indgaaet, i alle fald delvis, som histon. Dettets mængde er ca. 3 %, u. Mine værdier stemmer saaledes ganske godt overens med *Lilienfelds*, især naar man betænker, at *Lilienfeld* udfældte histonet med NH_3 , der ikke fælder dette kvantitativ.

Som bekjendt tilskriver *Lilienfeld* og andre forfattere nucleohistonet stor fysiologisk betydning. Jeg har derfor anseet det for at være af interesse at undersøge mine substansers fysiologiske virkninger i forskellige retninger. Jeg skal gjøre rede for disse undersøgelser i det følgende afsnit.

E. Fysiologiske iagttagelser over nucleoproteïderne fra thymus.

Nucleohistonet er af flere forfattere tillagt stor biologisk betydning særlig ligeoverfor blodets koagulation, idet *Lilienfeld* og *Huiskamp* har fundet, at en opløsning heraf in vitro koagulerer plasma og rene fibrinogenopløsninger. *Schmidt* og *Lilienfeld* fandt tillige, at indsprøjtning i blodbanen frembragte udbredte intravasculære koagulationer, medens samtidig udtappet blod forblev flydende.

Jeg har udført en del spredte undersøgelser om proteïdets og det nucleïnsure histons fysiologiske virkninger, og har særlig havt min opmærksomhed henvendt paa disse substansers mulige forhold til koagulationen.

Hvis en Opløsning af nucleoproteïdet sættes til plasma eller til en fibrinogenopløsning, tilberedt efter *Hammarsten*, frembringes ingen synlige forandringer heraf. Derimod

bringer en opløsning af nucleoproteïdet i 1 % NaCl efter tilsætning af et par draaber CaCl_2 -opløsning en fibrinogenopløsning, der indeholder 2 % NaCl, til at koagulere. At dette forhold *ikke* har det mindste med *fibrinfermentets* aktivering ved kalk at gøre, bevises ved den omstændighed, at nucleoproteïdopløsningen ikke længer frembringer koagulation, naar kalken atter fjernes ved dialyse eller oxalat. Jeg har derfor ikke forfulgt denne observation videre. Indsprøjtning af proteïdet paa en kanin frembringer ingen intravasculære koagulationer. Dyret (der veiede 2000 gr.) overlevede operationen i bedste velgaaende, uagtet der indsprøjttes 20 ccm. af filtratet fra kalkfældningen, som indeholdt rigeligt proteïd. Heller ikke bevirkede proteïdet nogen forandring i koagulationstiden in vitro.

Videre har jeg fundet, at 0,9 % kogsaltextraktioner ved henstand i digestionsapparat ved 40° undergaar en saadan autodigestion, som *Kutscher* har beskrevet det.

Det nucleïnsure histon derimod koagulerer under ingen omstændighed fibrinogenopløsninger hverken med eller uden kalk. Heller ikke udøver indsprøjtninger i vena jugularis paa kaniner nogen synlige virkninger.

I det ene af disse forsøg indsprøjttes paa en middelsstor kanin i vena jugularis 15 ccm. af en ca. 1,5 % opløsning af nucleïnsurt histon. — Blodets normale koagulationstid (veneblood fra v. jugularis) var $5\frac{1}{2}$ minut. 3 minutter efter indsprøjtningen udtoges en blodprøve, der strax koagulerede. Der indtraadte ingen forandring i dyrets almenbefindende. Urinen fra de følgende 24 timer indeholdt hverken æggehvide eller sukker.

I det andet forsøg veiede kaninen 2700 gr. Veneblood fra jugularis koagulerede efter 4 min. Desuden udtoges

tre blodprøver, hver paa 3 ccm., hvoraf den ene tilsattes 1 cc. 2 % NaCl-opløsning; denne prøve koagulerede paa $3\frac{1}{2}$ min. Den anden prøve tilsattes 1 ccm. af en opløsning af nucleïnsurt histon (4,66 %) og den tredje 1 cc. af en nucleïnsyre-opløsning. Begge disse prøver koagulerede ogsaa paa $3\frac{1}{2}$ min. Derpaa indsprøitedes gennem jugularis 10 ccm. nucleïnsurt histon-opl. paa 4,66 % = 0,18 gr. pr. kilo dyr, uden at nogen forstyrrelse i almenbefindendet indtraadte. 2 min. efter indsprøitningen udtoges atter en blodprøve, der koagulerede paa $3\frac{1}{2}$ min. Det nucleïnsure histon frembringer saaledes *ingen* forandringer i blodets koagulationsforholde hverken in vivo eller in vitro.

Det nucleïnsure histon er meget modstandsdygtig mod forraadnelse. En opløsning henstod saaledes 8 dage i digestionsapparatet ved ca. 40° , uden at den mindste forraadnelse kunde merkes. Der var dog indtraadt den forandring, at CaCl_2 ikke længer gav fældning, men vel eddikesyre. Dette kan maaske antages at skyldes en autodigestion.

Endelig har opløsninger af det nucleïnsure histon evne at hindre thymuscellernes opløsning af vand. Thymusceller rystedes med vand til en emulsion og deltes i 2 dele. Den ene tilsattes ca. $\frac{1}{10}$ vol. vand og den anden samme volum af en nucleïnsur histonopløsning. Efter 5 timer i digestionsapparatet var i den første prøve cellerne forandret til en slimet klump, medens den anden indeholdt uforandrede celler, der dog maaske var en smule skrumpne. Kogsaltmængden i begge prøver var 0,08 % NaCl.

II. Om nucleoproteïderne fra lymfekjertlerne.

I overensstemmelse med *Lilienfeld*, der ogsaa fandt nucleohistonet som en bestanddel af blodets leucocyter og lymfecellerne, har man almindelig antaget at disse har en med thymuscellerne overensstemmende sammensætning. I forbindelse med mine undersøgelser over thymus ansaa jeg det paakrævet at foretage en sammenlignende undersøgelse heraf.

Lymfecellerne blev taget fra kjertler i mesenteriet og det retroperitoneale væv hos oxer.

Fremstillingsmaaden var en kombineret ekstraktion med 0,9 % NaCl-opløsning og destilleret vand, eller i nogle tilfælde direkte vandextraktion af de søndermalede kjertler.

Resultatet af kogsaltextraktionen var en ugjennemsigtig, brunfarvet, amfoter reagerende opløsning, der ikke gav den mindste fældning ved CaCl_2 , men derimod en rigelig fældning ved eddikesyre. Ved ekstraktion med vand bemerkedes ikke nogen saadan slimdannelse som ved thymus. En anden forskjel bestod deri, at man allerede nogle minutter efter tilsætningen af vand kunde paavise substanser, der fældtes ved $\bar{\text{A}}$ og CaCl_2 . Efter foregaaende ekstraktion med kogsaltopløsning kunde man med vand extrahere et proteïd, der fældtes ved CaCl_2 . Ved direkte vandextraktion paa kjertlerne, fik man et filtrat, der gav fældning ved CaCl_2 , og i filtratet herfra fik man atter en rigelig fældning ved eddikesyre.

Kalkfældningen blev behandlet med alkohol og derpaa ekstraheret med 2 % NaCl-opløsning, hvorved der fremkom

et vandklart filtrat. I et tilfælde blev ogsaa kalkfældningen direkte ekstraheret med kogsalt — altsaa uden alkoholindvirkning. Med meget besvær fik jeg endelig et klart filtrat, der forholdt sig fuldstændig som det med alkohol behandlede. Blot en mindre del gik ved kogsaltbehandlingen i opløsning. Ligesom tilfældet var med thymus, blev ogsaa her det meste tilbage som en seig masse paa filtrum. Kogsaltopløsningen blev derpaa fortyndet og tilsat CaCl_2 , men *ingen* fældning opstod. Derimod gav prøven saavel rigelig fældning ved $\bar{\text{A}}$ som ved HCl og ligeledes fældning ved mætning med kogsalt. Dette fra thymus afvigende forhold til CaCl_2 beredte mig til en begyndelse nogle vanskeligheder, men disse beseiredes dog. Hvis jeg nemlig, efter at have opløst kalkfældningen i 2 % NaCl , underkastede denne *dialyse*, fik jeg vistnok ingen fældning som ved thymus, men opløsningen gav nu atter fældning ved CaCl_2 . Heraf kunde formodes, at kogsaltet hindrede udfældningen ved kalk. Denne formodning bestyrkedes derved, at man ved tilsætning af smaa mængder kogsalt atter kunde hindre kalkfældningens fremkomst. Ogsaa i en anden henseende var denne substans eiendommelig, idet tilsætning af kogsalt alene til 1 % *aldrig* frembragte nogen fældning. Og ikke det alene, men hvis man udfældte substansen med CaCl_2 , *fik man den med lethed opløst i 1 % kogsaltopløsning.*

Fremdeles fandt jeg, at fældningen ved CaCl_2 *ikke var* kvantitativ, selv naar NaCl manglede, men at man i filtratet altid kunde udfælde smaa rester med eddikesyre.

Den foreliggende substans var saaledes forskjellig fra det nucleinsure histon fra thymus. Det har derfor ogsaa sin interesse at se paa dens sammensætning. Mættedes op-

løsningen med kogsalt, fik man her som i thymus rigelig fældning, og denne bestod af *histon*. I filtratet herfra var biuretreaktionen negativ eller omtrent negativ. Derimod fik man ved tilsætning af en syre eller alkohol rigelig fældning. Denne fældning ved alkohol opløstes med lethed i vand og kogtes derpaa med fortyndet saltsyre. Iblandt spaltningsprodukterne isoleredes rigelige mængder xanthin-baser og orthophosphorsyre. Det var saaledes utvilsomt, at forbindelsen var nucleïnsurt *histon*, men ikke det samme som i thymus. Fældningsgrænserne for Am_2SO_4 -opløsning laa mellem 70—90 — altsaa det samme som ved thymus.

Hvorpaa forskjellen beror, ved jeg ikke. Jeg er mest tilbøielig til at antage, at nucleïnsyrerne er forskellige, men at muligens histonerne er identiske. Som nævnt fik man i vandextraktet en efterfældning med eddikesyre i filtratet fra CaCl_2 -fældningen. Denne efterfældning bestod for en ringe del af nucleïnsurt *histon*, der ikke var fældt af CaCl_2 , men hovedsagelig af et proteïd, der i alle reaktioner fuldstændig stemte overens med nucleoproteïdet fra thymus. Det blev ligesom thymusproteïdet spaltet af 0,3 % HCl i et uopløseligt nucleïn og et albuminat, der var uopløselig ved neutral reaktion, og som kunde udsaltes af 20 Am_2SO_4 . Proteïdet var letopløseligt i overskud af syrer.

I det foregaaende er omtalt, at 0,9 % kogsaltextraktion af lymfekjertlerne giver en opløsning, der *ikke* fældes af CaCl_2 men af eddikesyre, saaledes som før beskrevet for thymus' vedkommende.

Da vi saaledes har seet, at kalkfældningen er let opløselig i 1 % NaCl , kunde der tænkes den mulighed, at det nucleïnsure *histon* i virkeligheden var gaaet i opløsning ved kogsaltextraktionen, men ikke direkte kunde

paavises. Dette var ogsaa tilfældet. Dialyseredes nemlig kogsaltextraktet, fik man ved paafølgende CaCl_2 -tilsætning en rigelig fældning af nucleïnsurt histon, og i filtratet herfra med eddikesyre efterfældning af proteïdet.

Videre varierede jeg forsøget ogsaa paa den maade, at jeg til kogsaltopløsning satte 0,01 % CaCl_2 og ekstraherede hermed lymfekjertlerne, uden at der dog viste sig nogen forskjel fra det samtidig udførte kontrollforsøg: begge indeholdt nucleïnsurt histon.

Endelig foretoges kogsaltextraktion af lymfekjertlerne, saaledes at der foruden CaCl_2 ogsaa blev tilsat NaOH 0,1 %, — uden at dette dog forandrede resultatet.

Det har sin interesse at undersøge proteïdets og det nucleïnsure histons mængdeforhold i lymfekjertlerne til sammenligning med de samme substansers mængdeforhold i thymus. Lymfekjertlerne maltes i kjødkværn og pressedes derpaa gennem en fin metaldug, hvorved man fik cellerne som en grødførmig masse, der analyseredes kvantitativt.

	Thymus.	Lymfekjertler.
Vand	80,41	80,41
Faste stoffe	19,59	19,59
Total mængde af æggehvidelegemer	15,52	13,78
Nucleïnsurt histon	3,15	0,69
Nucleoproteïd	1,08	1,06
Alkoholopløselige stoffe	2,48 %	4,76
Aske	1,59 %	1,05

Medens saaledes nucleoproteïdet forekommer i nøiagtig samme mængdeforhold i thymus og i lymfekjertlerne, er mængden af nucleïnsurt histon betydelig mindre i lymfekjertlerne, hvor blot ca. 5 % af æggehviden findes som saadan. Jeg har derfor hidtil ikke kunnet skaffe mig tilstrækkeligt materiale til analyser af denne substans.

Nucleoproteidet har jeg heller ikke analyseret, da det ikke var mig muligt at fremstille præparater, der egnede sig til analyse, (det nucleinsure histon fældes ufuldstændig af CaCl_2).

Da saaledes lymfekjertlerne har vist en saa forskjellig sammensætning fra thymus, opstaar naturligt det spørgsmaal, om lymfekjertlernes celler er identiske med de hvide blodlegemer i blodet. Man kunde paa forhaand antage, at saa var tilfældet. En iagttagelse peger dog i en anden retning. Jeg har nemlig fundet, at lymfekjertlerne ikke indeholder noget *fibrin ferment*, men forholder sig i saa henseende analog med thymus.

III. Undersøgelse af leucocyterne i blodet.

Det blod, der bedst egner sig til fremstilling af leucocyter, er *hestblod*. Det var imidlertid forbundet med vanskelighed at skaffe dette, saa jeg blot har kunnet bearbejde 6 l. blod, hvoraf 4 l. var tilsat ammoniumoxalat til 0,3 %, og 2 l. var koaguleret blod. Desuden bearbejdedes 10 l. oxeblood, hvoraf 4 l. koaguleret. Det koagulerede blod defibrineredes ved at presses gennem seildug. Blodet blev altid centrifugeret. Plasma resp. serum samledes for sig og centrifugeredes endnu engang. Derpaa henstod det 48 timer i isskab. Der var da altid opstaaet en fældning, som samledes ved centrifugering. Denne fældning, om hvilken vi efter *Pekelharing* og *Hammarsten* ved, at den indeholder protrombin, blev derpaa undersøgt. Desuden blev det øverste

lag af blodlegemerne, der indeholdt de hvide blodlegemer, samlet i et bægerglas. (Det lykkedes let for hesteblodets vedkommende, men meget vanskeligere for oxebloodets.) Dette lag slæmmedes op i ca. 100—200 cc. fysiologisk kogsaltopløsning og blev strax centrifugeret. Derpaa blev blodlegemerne enten slæmmet op i 1 % kogsaltopløsning i 24 timer og derpaa i vand, eller alene i destilleret vand eller endelig i de fleste forsøg slæmmet op i eddikesyreholdigt vand og udvasket hermed til fjernelse af hæmoglobinet. Den ene portion hesteblood, der undersøgte ukoaguleret, var usædvanlig rig paa leucocyter.

Plasma- og serumfældningen var delvis opløselig i destilleret vand. Ved tilsætning af CaCl_2 eller eddikesyre til denne opløsning fik man en rigelig fældning. Da filtratet fra kalkfældningen *ingen* efterfældning gav ved eddikesyre, maa man antage, at det er samme substans som fældes af begge. Eddikesyrefældningen gav ved behandling med meget fortyndet alkali (0,01 % NaOH) en slimet vædske; ved henstand fik man en klar opløsning, hvori der svømmede en gennemsigtig, slimet masse som en klump, der forsigtig kunde fjernes med en glasstav. Eddikesyrefældningen var delvis opløselig i fortyndet saltsyre. Kalkfældningen var uopløselig i fortyndede saltopløsninger ligesom i fortyndede alkalier. Tilsatte man CaCl_2 til den slimede opløsning af eddikesyrefældningen, blev den hvid, gennemsigtig og skrumpede sammen.

Gik man ud fra plasma, indeholdt fældningen protrombin. Opslæmmet i vand med CaCl_2 koagulerede den en fibrinogenopløsning, og dette samme indtraadte ogsaa efter fjernelse af kalken, medens den oprindelige opløsning var *uden* indvirkning.

Efter kalkindvirkningen indeholdt saaledes plasmafældningen frit fibrinferment. Det lod sig fremdeles vise, at *kalkfældningen* ikke indeholdt fibrinfermentet, idet den var ganske uvirksom, medens *filtratet* fra kalkfældningen, uagtet det ikke gav nogen fældning med eddikesyre, indeholdt ferment. Desuden var det meget let at vise, at hverken plasmafældningen i sin helhed eller kalkfældningen indeholdt det *mindste histon* og følgelig heller ikke noget nucleïnsurt histon. Ved ekstraktion af fældningen med 0,3 % HCl fik man en rigelig mængde æggehvide i opløsning, men ved neutralisation fik man enten al æggehvide udfældt, hvad der var regelen, eller ogsaa gav filtratet biuretreaktionen, derimod hverken fældning med NH_3 eller med alkaloidreagenserne. Derimod udfældtes den fuldstændig i svag sur eller alkalisk opløsning af mættet Am_2SO_4 -opløsning tilsat til 20 %. Ved ekstraktion af leucocyterne med 1 % NaCl fik man en opløsning, der efter dialyse gav sparsom fældning med CaCl_2 . Denne fældning forholdt sig som den foregaaende. Ved saltsyrebehandling afspaltedes albuminatet.

Vandextraktet paa leucocyterne giver en rigelig fældning ved CaCl_2 og eddikesyre. *Ogsaa denne kalkfældning forholdt sig som de foregaaende.*

Resultatet af vore undersøgelser er saaledes, at ekstraktet saavel af plasma- og serumfældningen som af blodlegemerne selv *ikke* indeholder noget nucleïnsurt histon men derimod et proteïd, der i sin sammensætning viser overensstemmelse med det proteïd, vi tidligere har gjort bekendtskab med, men som til forskjel herfra fældes af CaCl_2 .

Den forholdsvis ringe substansmængde, hvorover jeg i disse forsøg kunde disponere, maner dog til forsigtighed

med hensyn til slutninger angaaende mangelen paa histon i kalkfældningen, om det end maa ansees for overmaade usandsynligt, at det findes. Hvis man til sammenligning ekstraherer den oprindelige, urene kalkfældning fra *lymfekjertlerne* med 0,3 % HCl, faar man i ekstraktet et meget lidet neutralisationspræcipitat men derimod en forholdsvis rigelig histonmængde. Man kunde overfor blodforsøgene indvende, at kalkfældningen var forurensset med genuin æggehvide, som ved HCl-behandlingen gik over til albuminat, og i virkeligheden giver serumæggehvide ved henstand med 0,3 % HCl et albuminat, der saavel i svag sur som svag alkalisk opløsning giver rigelig fældning med mættet Am_2SO_4 -opløsning tilsat til 20 %. For at møde denne indvending kunde man vistnok yderligere rense kalkfældning ved alkohol etc., men i betragtning af dennes ringe mængde, afstod jeg herfra.

Imidlertid søgte jeg dog ad en anden vei at belyse sagen. Gaaende ud fra selve de hvide blodlegemer, udvaskede jeg disse med eddikesyreholdigt vand, indtil hæmoglobinfarven forsvandt. Eddikesyren var saa sterk, at globulinet opløstes deraf. Blodlegemerne af 10 l. blod behandlede paa denne maade. I alle forsøg fik jeg ved paafølgende HCl-extraktion rigelig albuminatmængder i opløsningen, medens filtratet fra denne altid var frit for æggehvide og ikke gav biuretreaktion. Heraf turde fremgaa, at histon ikke findes i leucocyterne.

I et forsøg med hesteblood, der var særdeles rigt paa leucocyter, udførtes i HCl-extraktet en kvantitativ bestemmelse af æggehviden. Til sammenligning behandlede en portion lymfekjertler paa samme maade.

	Leucocyter.	Lymfekjertler.
Faste stoffe	0,200 %	2,89 %
Aske	0,022 -	0,15 -
Organiske bestanddele	0,178 -	2,74 -
Albuminat	0,142 -	0,40 -
Histon	—	0,11 -
Rest	0,036 -	2,23 -

Medens ekstraktet af leucocyterne indeholder 80 % af de faste organiske stoffe som albuminat, findes i leucocyterne blot 15 % som saadant. Fremdeles indeholder lymfekjertlerne 4 % af æggehviden som histon, medens dette mangler i leucocyterne. Hvad «resten» betræffer, bestaar denne i leucocyterne blot for en mindre del af æggehvide, men vistnok mest af alkoholopløselige, tildels flygtige bestanddele. Ved foraskning indtraadte blot en forbigaaende svag forkulning, og biuretreaktionen var *negativ*. I lymfekjertelekstraktet bestod «resten» sikkert bl. a. af smaa mængder histon, der ikke var udfældt ved NH_3 -tilsætningen, som benyttedes til bestemmelse af histonmængden. Ved tilsætning af 30 % NaOH fik man fældning.

Dette forsøg viser saaledes, at lymfekjertlernes og leucocyternes sammensætning er væsentlig forskjellig, og at leucocyterne *ikke* indeholder histon.

Absolut afgjørende kan dog heller ikke dette forsøg siges at være, da lymfekjertel-extraktet er saa langt mere koncentreret end leucocyt-extraktet. Omregnes derfor resultatet for det sidstnævnte til samme koncentration som leucocyt-extraktet (faste stoffe = 0,2), faar man en histonmængde af 0,006 %, en mængde, der fuldstændig unddrager sig enhver paavisning. Histon kan saaledes have været tilstede i leucocyterne, uden at vi i vort forsøg har kunnet paavise det. Albuminatmængden i begge ekstrakter taler

dog *sterkt* herimod. Ved samme fortyndning faar man nemlig 0,142 % albuminat i leucocyterne mod 0,043 % i lymfekjertlerne. Sammensætningen bliver saaledes væsentlig forskjellig i begge, og histonets tilstedeværelse i leucocyterne meget usandsynlig, især naar man samtidig ser hen til kalkfældningens mangel paa histon.

Vor undersøgelse over nucleoproteïderne fra de hvide blodlegemer er hermed tilendebragt. Undersøgelsen er ganske vist endnu mere ufuldstændig end for lymfekjertlernes vedkommende, men har jeg end lidet positivt at fremlægge, saa turde dog mine undersøgelser i væsentlige punkter vise urigtigheden af de fysiologiske og kemiske forestillinger, som *Kossel* og *Lilienfeld* har bragt ind i videnskaben.

Og dette har ganske vist sin betydning. Disse urigtige opfatninger har nemlig virket meget hæmmende paa studiet af leucocyterne. Dette bør efter min mening ikke begynde med leucocyterne fra blodet. Derimod har man i friske exsudater og friske pusceller et udgangsmateriale, som visselig vil vise sig hensigtsmæssig for en kemisk undersøgelse.

Da man nu forgjæves hidtil har søgt efter histon i pusceller, selv hvor disse har vist et fuldstændig normalt mikroskopisk billede, har man sans phrase antaget deres sammensætning forandret fra det normale. Efter mine ovenfor beskrevne undersøgelser er en saadan slutning visselig meget forhastet. Ved behandling med 10 % NaCl svæller leucocyterne op til en lignende slimet masse som puscellerne. Deres egenskaber i denne henseende er saaledes hinanden meget lige, men nogen sammenligning lader sig forøvrigt ikke anstille paa grund af vort ringe kjendskab til puscullernes kemi.

Fra melkeslam har jeg i sin tid bearbejdet store masser leucocyter paa histon med fuldstændigt negativt udbytte. Dette forhold, som dengang var mig meget gaadefuldt, harmonerer meget vel med de forestillinger om leucocyternes sammensætning, der er resultatet af nærværende arbeide.

Sammenligner vi resultaterne af undersøgelserne over thymus, lymfekjertlerne og leucocyterne med hverandre, er det paaafaldende, at disse celler, der for en mikroskopisk betragtning synes identiske eller næsten identiske, — i kemisk henseende viser saa store forskjelligheder. Thymus-cellerne og leucocyterne danner ligesom to polare modsætninger, mellem hvilke lymfekjertlernes celler danner et naturligt bindeled, men nogen nærmere redegjørelse for disse forholde er det os endnu umuligt at give.

Man gaar ikke for vidt, naar man siger, at man ved den kemiske undersøgelse kan opnaa en intimere forstaaelse af cellernes bygning end ved den mikroskopiske undersøgelse.

Paa den anden side har man ved mikroskopets hjælp konstateret uligheder mellem de enkelte leucocyter i blodet (macro og microcyter, enkjernede og flerkjernede leucocyter etc.)

Det er selvsagt umuligt at tænke sig en kemisk differentialundersøgelse heraf i blodet. Men ogsaa her vil visselig undersøgelsen af specielle exsudater være den vei, man maa følge.

IV. Undersøgelse af sarcomer.

I sammenhæng med mine foregaaende undersøgelser har jeg ment at det kunne være af interesse at foretage undersøgelser over rundcellede sarcomer. Naar nemlig mine undersøgelser viser, at man i kemisk henseende maa opstille tre forskellige celletyper, vil vi i sarcomerne kunne vente at finde repræsentanter for en eller flere af disse eller eventuelt nye forholde.

Vi vil ved kemiens hjælp maaske kunne komme til dybere forstaaelse af disse cellers slægtskabsforholde og finde omstændigheder, der kan kaste nyt lys tilbage paa vore normale lymfeceller.

Uagtet jer har henvendt mig til flere kirurger, har det imidlertid været mig umuligt i øieblikket at opdrive nogen saadan svulst. Ved prof. *Borelius'* velvilje er der fra Lunds lazareth overladt mig et *fibrosarcom*, der dog ikke frembød noget af særlig interesse. Ved vandextraktion fik man et proteid i opløsning, der ikke fældtes af CaCl_2 men af eddikesyre. Ved behandling med 0,3 % HCl kunde man saavel heraf som af den efter vandextraktionen uopløselige rest afspalte et albuminat, der forholdt sig som vanligt.

Analysetabeller.

Kulstof- og *vandstof*analyserne udførtes paa vanlig maade.

Kvælstoffet bestemtes efter *Kjeldahl* med *Wilfarths* modifikation.

Phosphorsyren bestemtes som pyrophosphat. Substansen oxyderedes først efter *Neumann*,¹ hvorpaa phosphor-

¹ Archiv f. Anat. u. Physiol. Physiol. Abth. 1900. Pg. 159.

syren først fældtes som molybdat. Den samme methode er anvendt af *Huiskamp*. Den er langt hurtigere og bekvemmere end kali-salpetermetoden og er vistnok fuldstændig ligesaa nøiagtig. Jeg har dog det indtryk, at man under oxydationen, der foretages med en blanding af lige dele konc. svovlsyre og salpetersyre, maa gaa forsigtig frem under ophedningen. Gaar man her uforsigtig frem, faar man altid for lave værdier, da en del phosphor ganske vist afspaltes, men ikke faar tid til at oxyderes. Jeg har derfor altid før syreblandingen tilsat substansen en smule vand og først efter nogen tids henstand forsigtig opvarmet, idet jeg aldrig lod nogen forkulning indtræde.

Kalken i det nucleïnsure histon bestemtes altid som oxalat med paafølgende titrering med permanganat. *Huiskamp* bestemte den alene ved indaskning af eddikesyre-extraktet paa substansen, men dette indeholder ogsaa *organiske* bestanddele.

Thymus.

A-histon.

0,1736 gr. forbrugte til neutralisation 22,15 ccm. $\frac{n}{10}$ $\text{H}_2\text{SO}_4 = 17,86\%$ N.

0,1228 gr. afgav efter glødning ingen aske.

0,0906 gr. forbrugte til neutralisation 11,40 ccm. $\frac{n}{10}$ $\text{H}_2\text{SO}_4 = 17,61\%$.

0,0874 gr. leverede 0,0012 gr. aske = $1,37\%$. Omregnet paa askefri substans er N = $17,86\%$.

0,1007 gr. forbrugte til neutralisation 12,65 ccm. $\frac{n}{10}$ $\text{H}_2\text{SO}_4 = 17,59\%$.

0,0559 gr. (!) leverede 0,0003 gr. aske = ca. $0,5\%$. Omregnet paa askefri substans N = $17,66\%$.

B-histon.

- 0,1019 gr. forbrugte til neutralisation 12,90 ccm. $\frac{n}{10}$ $\text{H}_2\text{SO}_4 = 17,72 \frac{0}{10}$.
- 0,0892 gr. leverede 0,0020 gr. aske = $2,23 \frac{0}{10}$. Omregnet paa askefri substans $N = 18,12 \frac{0}{10}$.
- 0,1470 gr. forbrugte til neutralisation 18,45 ccm. $\frac{n}{10}$ $\text{H}_2\text{SO}_4 = 17,57 \frac{0}{10} N$.
- 0,1040 gr. leverede 0,0025 gr. aske = $2,40 \frac{0}{10}$. Omregnet paa askefri substans $N = 18,00 \frac{0}{10}$.
- 0,1310 gr. forbrugte 16,30 ccm. $\frac{n}{10}$ $\text{H}_2\text{SO}_4 = 17,42 \frac{0}{10} N$. Omregnet paa askefri substans = $17,85 \frac{0}{10} N$.

Nucleoproteidet.**Præp. no. 1.**

- 0,1484 gr. substans forbrugte 17,50 ccm. $\frac{n}{10}$ $\text{H}_2\text{SO}_4 = 16,51 \frac{0}{10} N$.
- 0,2794 gr. substans afgav 0,0066 gr. aske = $2,36 \frac{0}{10}$. Omregnet paa askefri substans $N = 16,91 \frac{0}{10}$.
- 0,5617 gr. substans leverede 0,0250 gr. pyrophosphat = $1,22 \frac{0}{10} P$.
- 0,2093 gr. substans gav 0,1195 gr. H_2O og 0,3800 gr. $\text{CO}_2 = 6,35 \frac{0}{10} H$ og $49,50 \frac{0}{10} C$.

Præp. no. 2.

- 0,2652 gr. substans leverede 0,0096 gr. pyrophosphat = $1,01 \frac{0}{10} P$.

Præp. no. 3. Fremstillet efter *Huiskamp*.

- 0,3199 gr. substans forbrugte 36,30 ccm. $\frac{n}{10}$ $\text{H}_2\text{SO}_4 = 15,89 \frac{0}{10} N$.
- 0,2343 gr. afgav 0,0051 gr. aske = $2,18 \frac{0}{10}$. Omregnet paa askefri substans $N = 16,24 \frac{0}{10}$.
- 0,2956 gr. substans leverede 0,0096 gr. pyrophosphat = $0,91 \frac{0}{10} P$.

Præp. no. 4. — Udkogt med alkohol.

- 0,5156 gr. substans leverede 0,0263 gr. pyrophosphat = $1,42 \frac{0}{10} P$.

Præp. no. 5. Fældning ved 20 Am_2SO_4 -opløsning.

- 0,2013 gr. leverede 0,0072 gr. pyrophosphat = $1,00 \frac{0}{10} P$.
- 0,1712 gr. leverede 0,0063 gr. pyrophosphat = $1,03 \frac{0}{10} P$.

Præp. no. 6.

- 0,2268 gr. substans leverede 0,0193 gr. pyrophosphat = $2,38 \frac{0}{10} P$.
- 0,2314 gr. substans leverede 0,0174 gr. pyrophosphat = $2,10 \frac{0}{10} P$.
- 0,1005 gr. substans forbrugte 12,90 ccm. $\frac{n}{10}$ $\text{H}_2\text{SO}_4 = 16,57 \frac{0}{10} N$.

Præp. no. 7. Albuminat extraheret med 0,3 % HCl af proteidet.
0,3429 gr. substans leverede spor af molybdat.

0,1401 gr. substans forbrugte 16,60 ccm. $\frac{n}{10}$ H₂SO₄ = 16,59 % N.

Præp. no. 8. Uopløselig rest efter HCl-extraktionen.

0,2052 gr. substans leverede 0,0183 gr. pyrophosphat = 2,49 % P.

0,2543 gr. substans leverede 0,0245 gr. pyrophosphat = 2,69 % P.

0,1445 gr. substans forbrugte 17,05 ccm. $\frac{n}{10}$ H₂SO₄ = 16,58 % N.

Det nucleinsure histon.

Præp. no. 1.

0,4066 gr. substans leverede 0,0800 gr. pyrophosphat = 5,49 % P.

0,1040 gr. substans forbrugte 12,45 ccm. $\frac{n}{10}$ H₂SO₄ = 16,76 % N.

0,1500 gr. substans leverede 0,0768 gr. H₂O og 0,2398 gr. CO₂ = 5,68 % H
og 43,60 % C.

0,2610 gr. substans extraheredes med fortyndet eddikesyre fuldstændigt.¹
Filtratet inddampedes til tørhed og glødedes sterkt. Residuet opløstes i fortyndet saltsyre, hvorpaa kalken udfældtes som oxalat og bestemtes ved titrering med permanganat. Der forbruges 1,2 ccm. permanganatopløsning, hvoraf 1 cc. = 0,0097 Fe.
= 1,59 % Ca.

0,0590 gr. substans leverede 0,0051 gr. aske = 8,64 %.

Præp. no. 2.

0,3122 gr. substans leverede 0,0599 gr. pyrophosphat = 5,35 % P.

0,1716 gr. substans forbrugte 20,60 ccm. $\frac{n}{10}$ H₂SO₄ = 16,81 % N.

0,2698 gr. substans leverede 0,1277 gr. H₂O og 0,4344 gr. CO₂ = 5,35 % H
og 43,92 % C.

0,1940 gr. substans afgav 0,0170 gr. aske = 8,76 %.

Præp. no. 3.

0,2560 gr. substans leverede 0,0472 gr. pyrophosphat = 5,15 % P.

0,1178 gr. substans forbrugte 14,35 ccm. $\frac{n}{10}$ H₂SO₄ = 17,05 % N.

0,1540 gr. substans leverede 0,0798 gr. H₂O og 0,2458 gr. CO₂ = 5,76 % H
og 43,54 % C.

0,2439 gr. substans forbrugte 1,2 ccm. permanganatopløsning (1 cc. = 0,0097 gr. Fe) = 1,70 % Ca.

0,2188 gr. substans leverede 0,0182 gr. aske = 8,31 %.

¹ Se ogsaa *Huiskamp*.

Nucleïnsyren.

Præp. no. 1.

0,1667 gr. substans leverede 0,0557 gr. pyrophosphat = $9,34 \frac{0}{0}$ P.

0,1787 gr. substans leverede 0,0595 gr. pyrophosphat = $9,30 \frac{0}{0}$ P.

0,1962 gr. substans forbrugte 21,65 ccm. $\frac{n}{10}$ H_2SO_4 = $15,45 \frac{0}{0}$ N.

0,1930 gr. substans leverede 0,0726 gr. H_2O og 0,2530 gr. CO_2 = $4,18 \frac{0}{0}$ H
og $35,75 \frac{0}{0}$ C.

Præp. no. 2.

0,2535 gr. substans leverede 0,0860 gr. pyrophosphat = $9,47 \frac{0}{0}$ P.

0,1393 gr. substans forbrugte 15,40 ccm. $\frac{n}{10}$ H_2SO_4 = $15,48 \frac{0}{0}$ N.

0,1692 gr. substans leverede 0,0650 gr. H_2O og 0,2230 gr. CO_2 = $4,27 \frac{0}{0}$ H
og $35,95 \frac{0}{0}$ C.

En portion nucleïnsyre sonderkogtes med $2 \frac{0}{0}$ HCl. Baserne udfældtes med $AgNO_3 + NH_3$. Fældningen udvaskedes og udkogtes med fortyndet HCl. Der tilsattes NH_3 til svag alkalisk reaktion, og opløsningen fortyndedes til 100 ccm. Efter 24 t. filtreredes fældningen fra og opløstes atter i fortyndet HCl. Saavel denne som filtratet fra NH_3 -fældningen udfældtes atter med $AgNO_3 + NH_3$, bundfaldet udvaskedes og tørredes ved 100° til konstant vægt.

Guaninfraktionen = 0,0163 gr. = 0,0064 gr. guanin = $12,65 \frac{0}{0}$

Adeninfraktionen = 0,0930 gr. = 0,0442 gr. adenin = $87,35 \frac{0}{0}$.

Saavel guanin- som adeninfraktionen gav negative udslag for murexidproven.

Thymuskjertler maledes i kjødkværn og pressedes gennem meget fint metalnet.

5,6000 gr. celler leverede 1,0968 gr. torsubstans = $19,59 \frac{0}{0}$.

1,0968 gr. torsubstans udkogt med alkohol, rest 0,9585 gr. = $2,47 \frac{0}{0}$ alkoholoploselige substanser.

0,9585 gr. leverede 0,0890 gr. aske = $1,59 \frac{0}{0}$.

16,1402 gr. celler kvantitativt ekstraheret med vand. Vandextraktet fældt med $CaCl_2$. Filtratet herfra efter udvaskning med vand fældtes med $\bar{A}$. Fældningen = 0,1750 gr. = $1,08 \frac{0}{0}$ nucleoproteid.

Kalkfældningen behandledes med alkohol og ekstraheret med $2 \frac{0}{0}$ NaCl. Filtratet fældtes med $\bar{A}$ = 0,5000 gr. = $3,09 \frac{0}{0}$ nucleïnsurt histon.

Lymfekjertlerne.

Lymfekjertler fra mesenteriet hos oxer maledes i kjødkværn og pressedes derpaa gennem metalnet.

1,8856 gr. celler leverede 0,3694 gr. torsubstans = $19,59 \frac{0}{0}$.

0,3694 gr. torsubstans udkogtes med alkohol, rest 0,2797 gr. = $4,76 \frac{0}{0}$ alkoholoploselige substanser.

0,2797 gr. leverede 0,0198 gr. aske = $1,05\%$.

4,4647 gr. lymfocytter ekstraheredes kvantitativt med vand. Vand-ekstraktet fældtes med CaCl_2 . Filtratet herfra efter udvaskning med vand gav fældning med $\bar{A} = 0,0475$ gr. = $1,07\%$ nucleoproteid.

Kalkfældningen behandledes med alkohol og ekstraheredes kvantitativt med 2% NaCl. Fældningen = 0,0310 gr. = $0,69\%$ nucleinsurt histon.

Lymfekjertler ekstraheredes med $0,3\%$ HCl.

5 cc. af det filtrerede ekstrakt gav 0,1443 gr. torsubstans, hvoraf 0,0075 gr. aske. Faste bestanddele ÷ aske = $2,74\%$.

10 ccm. neutraliseredes med NaOH¹ og filtreredes. 5 cc. af filtratet indeholdt 0,1450 gr. faste bestanddele, hvoraf 0,0277 gr. aske = $2,34\%$. Albuminatets mængde = $0,4\%$.

14 cc. af filtratet fra albuminatfældningen tilsattes 1 ccm. NH_3 , og fældningen frafiltreredes. 10 ccm. af filtratet indeholdt 0,2649 gr. torsubstans, hvoraf 0,0565 gr. aske = $2,23\%$. Histonmængden = $0,11\%$.

Filtratet fra histonfældningen gav pragtfuld biuretreaction og gav fældning med 30% NaOH, saa der sandsynligvis fandtes yderligere histon eller protamin, der var undgaaet NH_3 -fældningen.

Leucocyter fra hesteblood samlet ved centrifugering og udvasket med $\bar{A}$ -holdigt vand til fjernelse af blodfarvestoffet ekstraheredes med $0,3\%$ HCl.

5 ccm. af filtratet indeholdt 0,0100 gr. faste bestanddele = $0,2\%$.

10 ccm. neutraliseredes med NaOH, hvorved en forholdsvis rigelig fældning opstod, og filtreredes; 5 ccm af filtratet indeholdt 0,0029 gr. faste bestanddele, hvoraf 0,0011 gr. aske = $0,04\%$ faste organiske bestanddele. Det meste salt maa være slæbt med neutralisationspræcipitatet. Ved indaskningen opstod blot en svag, raskt forbigaaende for-
kulling.

¹ Den tilsatte NaOH-mængde (10% opløsning) var saa ringe, at man kan bortse fra den, da forsøget kun har approximativ værdi.

OM TRE
FOR NORGES FAUNA NYE FISKE

FRA

„MICHAEL SARS“ TO FØRSTE TOGTER I 1900 OG 1901

AF

R. COLLETT



KRISTIANIA
ALB. CAMMERMEYERS FORLAG
1903

Morten Johansens Bogtrykkeri. — Kristiania 1903.

Fam. **Rajidae.**

Raja fyllae, Ltk. 1887.

Synonym er.

- 1887 *Raja fyllae*, Ltk. Vid. Medd. Naturh. Foren. Kbhvn. 1887, p. 1.
Pl. I. (Kbhvn. 1888). *Davis Strædet 1884.*
- 1891 *Raja fyllae*, Ltk. Vid. Medd. Naturh. Foren. Kbhvn. 1891, p. 32,
(Kbhvn. 1892). *Davis Strædet 1889.*
- 1898 *Raja fyllae*, Ltk. Den Danske Ingolf Expedition, 2. Bd., No. 1,
(Ichthyol. Udbytte) n. 4, Pl. II. (Kbhvn. 1898). *Davis Strædet 1895.*
- 1900 *Raja fyllae*, Knipowitsch, Ann. Mus. Zool. Acad. Imp. Sci. St.
Petersb. T. V, p. 241. (St. Petersb. 1900). *Nord for Murman-
Kysten 1899.*
- 1900 *Raja fyllae*, Lönnb. Revue Internat. de Pêche et de Pisciculture.
St. Petersb. Vol. II, No. 4, p. 12. *Isefjord, (Spitsbergen) 1900.*
- 1901 *Raja fyllae*, Knipowitsch, Ann. Mus. Zool. Acad. Imp. Sci. St. Petersb.
T. VI, p. 82. (St. Petersb. 1901). *Havet øst for Jan Mayn 1899.*
- 1901 *Raja fyllae*, Ehrenb. Fauna Arctica, B. II. Die Fische, p. 142.
(Jena 1901). *NV. for Beeren Eiland 1898.*

Localitet: NV. for Magerø, Finmarken, 1900.

3 Unger med en Totall. af 160—225 ^{mm} erholdtes under «Michael Sars» 1ste Togt 29de August 1900 (Stat. 57) i Havet noget udenfor Magerøen. Dybden var 150 Favne (280 Meter).

Historie. Denne Art er oprindelig beskrevet af Lütken i 1887 efter et enkelt Individ, en ung Hun, med en Totall. af 198 ^{mm}, der optoges fra 80 Favnes Dybde (112 Meter)

i Davis-Strædet af den danske Orlogskrydser «Fylla» 7de Juli 1884. Dette unge Exemplar, der endnu besidder flere af de for Artens yngre Stadier characteristiske Træk, er saaledes dens Type.¹

I Sommeren 1889 blev af samme Krydser hjembragt fra de samme Farvande 3 andre Individer, der i 1891 af Dr. Lütken henføres alle under *R. fyllae*, skjønt et af dem, der var en ældre Han, i enkelte Henseender afveg fra det unge Typ-Exemplar.

Disse Exemplarer vare optagne i Davis-Strædet paa en Dybde af 235—426 Favne (430—760 Meter). De 2 vare yngre, med en Totall. af 115 mm og 201 mm, saaledes at det største omtrent var af Størrelse som Typ-Exemplaret; det 3die var en (yngre) Han med en Totall. af 470 mm, og havde temmelig lange Pterygopodier.

Fremdeles beskriver Dr. Lütken i 1898 i Beretningen om den Danske Ingolf-Expedition et stort og udviklet Han-Individ med en Totall. af 555 mm, optaget under denne Expedition fra 582 Favnes Dyb, ligeledes i Davis-Strædet Sommeren 1895. I flere Henseender afveg dette Individ fra de yngre Stadier, især ved Skiverandens stærke Indbugtning fortil, ved Tornevæbningen paa Halen, samt ved Farven; men det nærmer sig i disse Henseender til den ovenfor omtalte noget yngre Han (Totall. 470 mm) fra 1889, saaledes at Forf. anser begge disse for udgjørende de ældre Stadier af denne Art.

I de europæiske Farvande var *R. fyllae* ukjendt, indtil Knipowitsch i 1900 omtalte, at han Sommeren 1899 havde

¹ Aarstallet for Individets Erholdelse angives her at være 1874. En god Afbildning (senere copieret 1898 i samme Forfatters Beretning om «Ingolf»-Expeditionens ichthyologiske Udbytte) ledsager den originale Beskrivelse.

optaget 9 Exemplarer i et enkelt Kast med en Otter-Trawl nord for Murman-Kysten.

I 1901 meddelte atter Knipowitsch, at et Ind. var optaget af de russiske Expeditioner 17de Juni 1899 omtrent midt mellem Jan Mayn og Finmarken. Dette var en Unge med en Totall. af 99 mm.

Endvidere er der af den svenske zoologiske Polar-Expedition i 1900 optaget Exemplarer i Isefjord ved Spitsbergen fra en Dybde af 350 Meter, og nærmere omtalte af Lönnberg.

Endelig omtaler Ehrenbaum i 1901 i det store Samler-Værk «Fauna Arctica», at der under den tyske «Olga»-Expedition Sommeren 1898 var optaget en Han af denne Art fra 400 Meters Dyb NV for Beeren Eiland. Dette Expl. havde en Totall. af 465 mm.

Udmaalinger af de norske Exemplarer.

	<i>a</i> ♂	<i>b</i> ♀	<i>c</i> ♂
Totallængde	160 mm.	235 mm.	255 mm.
Skivens største Bredde	81 -	125 -	132 -
Skivens Længde fra Snudespids til			
Enden af Ventralerne	79 -	120 -	128 -
Halens Længde fra Anus	102 -	149 -	161 -
Snudens Længde fra Midtlinien gennem			
Øinene.....	19 -	27 -	29 -

Bemærkninger til Beskrivelsen. Det vil saaledes sees, at Halen hos disse Exemplarer er ikke ubetydeligt længere, end Skivens største Længde. Som et andet for Arten characteristic Træk kan fremhæves Halens kraftige

Bygning, idet den ved Roden har omtrent samme Bredde, som Afstanden mellem Spiraclerne.

Exemplarerne svare iøvrigt i alle Hovedtræk til Beskrivelsen af det unge Typ-Exemplar. De store Rygpletter var hos det største Exemplar noget færre og mindre distincte, end hos de øvrige; Halen er tegnet hos alle med uregelmæssige Tverbaand.

Undersiden er hvid; dog er der hos det største Han-Individ mørkere Skygninger langs Randen af Pectoralen og Ventralen, samt omkring Anus, ligesom Halens Underside hos alle Individuer er brungraa.

Tornevæbningen er særdeles ensartet hos alle 3 Individuer.

Den lange Række af Rygtorne begynder allerede i en Øienlængdes Afstand bag Øinene, og fortsætter sig uden Afbrydelse til 1ste Dorsal. Den 3die Rygtorn, regnet forfra, er lidt kraftigere, end de øvrige; Skuldertornene ere 1 paa hver Side (med Antydning til en mindre), og danne med den kraftige 3die Rygtorn en næsten ret Linie.

Mellem 3die og 4de Torn er der hos et Expl. en ubetydelig større Afstand, end mellem de øvrige Torne.

Paa Halen er endnu blot den midterste Tornerække udviklet; yderst mod Dorsalerne begynde dog ogsaa Tornene at hæve sig i de 2 Siderækker, uden at dog disse naa Midtrækkens Høide.

Det samlede Antal Torne i Ryggens og Halens Midtrække er følgende:

- a. 34 (deraf 9 paa Skiven)
- b. 36 (» 10 » —)
- c. 35 (» 10 » —).

Langs Indersiden af Orbita sidder en enkelt Torn fortil og bagtil, saaledes ialt blot 4 hos hvert Individ.

Skivens Conturer er næsten den samme hos alle, og den Indbugtning i den forreste Siderand, som kan spores hos det største Individ, er næsten umærkelig.

Det største og det mindste Individ vare Hanner med de første Anlæg af Pterygopodier.

Udbredelse. *Raja fyllae* bebor Ishavet fra Grønlands Vestkyst af indtil Havet udenfor Murman-Kysten i Øst.

De specielle Localiteter er følgende:

Davis-Strædet, Grønland. Typ-Exemplaret, en ung Hun, erholdtes her under «Fylla»s Expedition Sommeren 1884; senere er flere Individuer erholdte af danske Expeditioner i de samme Farvande.

Havet midt mellem Jan Mayn og Finmarken. Et Ind. optaget under en russisk Expedition Sommeren 1899.

Spitsbergen. Exemplarer erholdtes under den svenske Polar-Expedition 1900 i Isefjord.

Havet mellem Beeren Eiland og Spitsbergen. Et Ind. erholdtes under «Olga»-Expeditionen 1898.

Havet nordenfor Magerøen, Finmarken. 3 unge Ind. optagne under «Michael Sars»-Togtet Sommeren 1900.

Udenfor Murman-Kysten. 9 Ind. ere optagne under de russiske biologiske Undersøgelser Sommeren 1899.

Raja hyperborea, Coll. 1878.

Synonymier.

- 1878 *Raja hyperborea*, Coll. Forh. Vid. Selsk. Chra. 1898, No. 14, p. 7. (Chra. 1879). V. for *Spitsbergen* 1878.
1880 *Raja hyperborea*, Coll. Den Norske Nordhavs-Exped. Zoologi. Fiske, p. 9, Pl. I—II. (Chra. 1880).

- 1887 *Raja hyperborea*, Günth. Rep. Scient. Res. Voy. Challenger, Zoology, Vol. XXII, p. 8, Pl. IV. (London etc. 1887). *Færø-Canalen 1880*.
- 1891 *Raja hyperborea*, Lilljeb. Sveriges och Norges Fauna. Fiskarna, 3. Delen, p. 604. (Upsala 1891).
- 1895 *Raja hyperborea*, Smitt, Skandinaviens Fiskar. 2. Uppl. 2. Delen, p. 1111. (Stockh. 1895).
- 1895 *Raja hyperborea*, Goode et Bean, Oceanic Ichthyology, p. 28, Pl. IX, Fig. 28. (Washington 1895).
- 1898 *Raja hyperborea*, Ltk. Den Danske Ingolf-Expedition, 2. Bd., No. 1. Det ichthyologiske Udbytte, p. 2. (Kbhvn. 1898). *Syd for Jan Mayn; N. for Færøerne, 1895*.
- 1899 *Raja borea*, Garm. Rep. Expl. West Coasts Mexico, etc. (Albatross 1891) p. 24. (Cambridge U. S. 1899).
- 1899 *Raja hyperborea*, Garm. Rep. Expl. West Coasts Mexico, etc. (Albatross 1891) p. 24. (Cambridge U. S. 1899).
- 1901 *Raja hyperborea*, Ehrenbaum, Fauna Arctica, II Band, Die Fische, p. 142. (Jena 1901).

Localitet. Udenfor Andenæs, Vesteraalen, 1901.

Et udvoxet Han-Individ, med en Totall. af 705 mm (omtr. 27 Tommer), optoges under «Michael Sars»s Togt 19de Aug. 1901 fra en Dybde af omkr. 500 Favne (914 Meter), i Havet lige udenfor Andenæs i Vesteraalen.

Dette Ind., der havde fuldt udviklede Pterygopodier, er uet største, der hidtil var kjendt af denne Art.

Historie. *R. hyperborea* blev beskrevet i 1878 af Forf. efter et yngre Han-Individ, optaget under Nordhavs-Expeditionens 3die Togt 14de Aug. 1878 fra en Dybde af 839 Meter (459 Favne) i Havet vestenfor Spitsbergen, omtr. 115 Kilom. vest af Norsk-Øerne. Bunden bestod af blaa graat Ler, Bund-Temperaturen var $\div$ 1,0 (79° 59' N. B., 5° 40' Ø. L.)

Exemplaret blev senere (i 1880) mere udførligt beskrevet og afbildet i General-Beretningen om Nordhavs-Expeditionens Fiske.

I Aug. 1880 blev atter optaget under «Knight-Errant»-Expeditionen i Færø-Canalen 6 Exemplarer, hvoraf det ene var en næsten udvoxet Han med en Totall. af omtr 600 mm ($24\frac{1}{2}$ eng. Tomme); de øvrige vare yngre. Dybden varierede mellem 400 og 608 Favne (730—1140 Meter). Det mindste af disse Exemplarer var en Unge med en Totall. af omkr. 200 mm.

Disse Exemplarer bleve i 1887 nærmere beskrevne af Dr. Günther i General-Beretningen om Challenger-Expeditionen, med Afbildning af det største og det mindste Individ.¹

I sin Beskrivelse paapeger Dr. Günther enkelte Puncter, hvori de britiske Exemplarer afvige fra Typ-Exemplaret, men tillægger dog ikke disse den Vægt, at de kunne bebrunde nogen Artsforskjel.

Derimod finder Dr. Garman² i 1899 de samme Forskjelligheder saa store, at de britiske Exemplarer efter hans Anskuelse rettest bør udsondres som en egen Art, som han kalder *R. borea*.

Dernæst er af Dr. Lütken i 1898 beskrevet 3 nye Individer, optagne i Nordhavet under den Danske Ingolf-Expedition Sommeren 1875 fra det iskolde Vand; det ene fra Havet lidt syd for Jan Mayn ($69^{\circ} 31' \text{ N. B. } 7^{\circ} 06' \text{ V. L.}$), de 2 øvrige fra Havet lidt nord for Færøerne ($63\frac{1}{2}^{\circ} \text{ N. B. } 6^{\circ} 57' \text{ V. L.}$). Dybden varierede mellem 679 og 1309 Favne (1240—2460 Meter); Bundtemperaturen var $\div 0,6^{\circ}$ og $\div 1,0^{\circ} \text{ C.}$, Bunden Dynd og *Biloculina*-Ler.

¹ Rep. Scient. Res. Voy. Challenger, Zoology, Vol. XXII, p. 8, Pl. IV. (Lond. 1887).

² Rep. Expl. West Coasts Mexico etc. (Albatr. 1891) p. 24. (Cambr. 1899).

³ Den Danske Ingolf-Expedition, 2. Bd., No. 1. Det Ichthyologiske Udbytte, p. 2. (Kbhvn. 1898).

Af de 3 erholdte Individer var det ene en Han (Totall. 655 mm), de øvrige Hunner (Totall. 563—646 mm).

Som nye Bidrag til vor Kundskab om denne Art kommer fra «Michael Sars»s Togter en liden Unge, optaget i Havet øst for Island 28de Juli 1900 (Dybden omtr. 350 Favne eller 640 Meter), samt nærværende fuldt udviklede Han-Individ fra Havet udenfor Andenæs i Vester-aalen 19de Aug. 1901.

Beskrivelse. Det nye Han-Exemplar fra Andenæs stemmer i alle Hovedtræk fuldkommen overens med Artens Typ-Exemplar, den noget yngre Han fra Nordhavs-Expeditionen, hvis Totall. var 518 mm (eller ikke fuldt 20 Tommer).

Udmaalingen.

Totallængde	705 mm.
Skivens Bredde	504 —
Skivens Længde til Enden af Pectoralerne	401 —
Skivens Længde til Enden af Ventralerne	480 —
Halens Længde fra Grunden af Ventralerne ...	278 —
Halens Længde fra Anus	313 —
Pterygopodiernes Længde	180 —
Snudespids til Øiet	111 —
Interorbital-Brusken	50 —
Afstanden mellem Spiraclerne	70 —
Afst. fra Underkjæven til Grunden af Ventralerne	282 —

Legemsformen er næsten nøiagtig den samme hos de 2 Individer. Hos den unge og fuldt udvoxede Han er Snuden bleven relativt en Smule kortere, idet det stærkt udviklede Kjæveparti har gjort Partiet udenfor Øinene noget bredere, end hos det yngre Individ.

Snuden har dog bevaret sin moderat tilspidsede Form; Snudelængden (Afstanden fra Snudespids til Øie) er endnu

mindst lige saa stor, som Afstanden mellem Spiraculernes Yderrande, medens den hos det yngre Typ-Individ var noget større, end denne Afstand. Maalt paa Undersiden viser Afstanden mellem Næseborene sig hos begge Expl. at være lidt mere, end deres Afstand fra Snudespidsen.

Det vil sees, at Halen hos det nye Individ er relativt kort; dens Længde, maalt fra Ventralernes Grund, er mindre, end Afstanden fra Ventralernes Grund til Kjæverne.

Beklædning. Ligesom hos Typ-Exemplaret er Oversiden hovedsageligt ru, Undersiden glat.

Oversidens Ruhed er svag langs Bagranden af Pectoralerne, ligesom Ventralerne føles næsten glatte.

Snudetornene ere noget større, end de øvrige Smaatorne, men naa ikke de større Torne i Størrelse.

De større Torne ere følgende:

Orbital-Tornene ere 3, stillede som hos Typ-Exemplaret (2 indenfor *Spiracula*, 1 foran Øiet). Hos Typ-Exemplaret findes paa den venstre Side Antydning til en 4de Orbitalpig (indenfor Øiet), men denne er langt lavere, end de øvrige.

Skuldertornene ere paa venstre Side 3, paa højre blot 2. Hos Typ-Exemplaret var der vistnok blot 2 Sidetorne paa hver Side; men det kan sees, at den 3die (indre Torn) oprindelig har været tilstede, men er helt afslidt.

Som typisk for denne Art maa derfor ansees 3 Sidetorne paa Skulderpartiet.

De af Dr. Lütken omhandlede 3 Expl. fra Havet mellem Jan Mayn og Færøerne havde dels 2, dels 3 Sidetorne.

Rygtornene danne, tilligemed de 3 Torne midt mellem Skuldrene, en uafbrudt Række med Haletornene; (hos Typ-Exemplaret var der et ringe Mellemrum mellem Ryg- og

Haletorne). Deres samlede Antal er 28, (hos Typ-Exemplaret 26, hvoraf de 3 forreste i den originale Beskrivelse kaldtes «de mellemste Skuldertorne»); heraf findes paa Strækningen fra 1ste Dorsal indtil det Sted, hvor Halens laterale Hudflig ophører ved Haleroden ialt 16 Torne (hos Typ-Exemplaret 15).

Til Sammenligning kan anføres, at hos 5 af Dr. Günthers Exemplarer (fra Færø-Canalen) var det samlede Antal Ryg- og Haletorne 16 (?), 24, 24, 27 og 32.

Hos Dr. Lützens 3 Expl. fra Havet mellem Jan Mayn og Færøerne varierede Antallet mellem 21 og 31.

Dorsalerne stode tæt op til hinanden, uden mellemstillet Torn (dette synes ogsaa at have været Tilfældet hos de fleste øvrige Exemplarer).

«Karde-Tornene» (Hannens Parrings-Torne paa Pectoralens Overside) ere fuldt udviklede, 30 paa venstre, 32 paa høire Side.

Farven er i det væsentlige som hos Typ-Exemplaret.

Oversiden er (hos det en Tid paa Formol opbevarede Individ) næsten ensfarvet graabrun, og med ringe Spor af Tegninger. Hist og her kan sees Antydninger til enkelte mørke Pletter, der muligens have været tydeligere hos det friske Individ. En temmelig distinct saadan Plet af en Øiendiameters Størrelse er synlig paa den ene Side af Skiven henimod Kardetornene.

Undersiden er, ligesom hos Typ-Exemplaret, hvid med en stor uregelmæssig halvmaaneformig Plet af brunsort Farve, og en Del mindre Pletter. Den store Plet paa Bugens Sider er oventil mere opløst i Smaapletter, end hos Typ-Exemplaret; men ligesom hos dette er det mørke Felt helt afbrudt af den hvide Bundfarve foran Ventralerne.

Ventralerne selv ere i sin bagre Del helt mørke, ligesom Pterygopodierne og Halens Underside.

Langs Skivens Yderrand strækker den mørke Farve sig hist og her fremover lige ud i Snudespidsen, og selv foran Munden sees et Par svage brungraa Pletter.

Hele Bugpartiet fra Kjæverne af, og mellem Gjællepalterne, og langs Bugens Midte ned til Anus er uafbrudt hvidt.

Tænderne ere hos begge Exemplarer (ligesom hos Dr. Günthers fra Færø-Kanalen) overordentlig slanke, og stillede i en forholdsvis stor Afstand fra hinanden. De ere naalfine, og tiltage kun svagt i Tykkelse mod Roden, hvor de ende i en smal vertical Skive, uden Spor af udvidet Fod.

Membranen mellem Næseborene og Overkjæven danner nedtil en afrundet Flig, der i Randen er forsynet med en tæt Rad af korte Fryndser.

Pterygopodierne, der hos det nye Expl. ere fuldt udviklede, ere særdeles lange, omtrent jevntykke overalt, og efter deres hele Længde spaltede og slimfyldte. Henimod Spidsen findes i Randen af den ene Flig en skarp Klo (midt mod det fremtrædende Bruskparti i Apparatets Indre).

Ventrikelen hos det nye Individ indeholdt de næsten fordøiede Levninger af en mindre Fisk.

Udbredelse. *Raja hyperborea* er hidtil kjendt fra forskellige Localiteter i Nordhavet, fra Spitsbergens Vestkyst i Nord ned til Canalen mellem Scotland og Færøerne, og mellem Island i Vest og Norges Nordvestkyst.

Disse Localiteter ere:

Havet vestenfor Spitsbergen (115 Kilom. V. for Norsk-Øerne). Herfra stammer Typ-Exemplaret, optaget under

Nordhavs-Expeditionen Sommeren 1878. ($79^{\circ} 59' \text{ N. B.}$
 $5^{\circ} 40' \text{ Ø. L.}$)

Havet søndenfor Jan Mayn. Et Expl. optaget under
Ingolf-Expeditionen Sommeren 1895.

Nordvestkysten af Norge (udenfor Andenæs, Lofoten).
Et fuldvoxent Han-Individ (og flere andre) optoges under
«Michael Sars»-Togtet Sommeren 1901.

Havet øst for Island. En Unge, optaget af «Michael
Sars» i Juli 1900.

Havet nord for Færøerne. 2 Expl. optoges paa forskjel-
lige Localiteter under Ingolf-Expeditionen Sommeren 1896.

Færø-Canalen. 7 Expl., de fleste yngre, beholdtes i
1880 fra forskellige Localiteter under Knight-Errant Ex-
peditionen. Dette er det sydligste Punct, hvor den hidtil
vides paavist ($59^{\circ} 37' \text{ N. B., } 6^{\circ} 43' \text{ V. L.}$)

Fam. **Lycodidae.**

Lycodes rossii, Malmgr. 1864.

- 1864 *Lycodes rossii*, Malmgr. Öfv. Kgl. Vet. Akad. Handl., B. 21, No. 10,
p. 516. (Stockh. 1864.)
1878 *Lycodes lütkenii* (?), Coll. Den Norske Nordhavs-Exp. 1876—1878.
Zoologi. Fiske, p. 103, Pl. III, Fig. 25 (Chr.a 1880).
1901 *Lycodes celatus*, Jens. Vid. Medd. Naturh. Foren., Kbhvn. 1901,
p. 208.
1901 *Lycodes celatus* var. *spitsbergensis*, Jens. Vid. Medd. Naturh.
Foren., Kbhvn. 1901, p. 209.

Localitet. Porsangerfjord 1900.

Et ungt Exemplar med en Total. af 124^{mm} optoges
under «Michael Sars»s 1ste Togt 24de Aug. 1900 (Stat. 53)
ved Østerbotten i Porsangerfjorden, fra en Dybde af 100
Meter. Bundtemperaturen $\div 1,15^{\circ}$.

[Desuden foreligge 31 Expl. fra Green Harbour (Isfjord) Spitsbergen, optagne under «Michael Sars»s 2det Togt 26de Juli 1901 (Stat. 87) fra en Dybde af 140 Meter. Bundtemperaturen $+1,1^{\circ}$. Disse Exemplarer have en Totall. mellem 55 mm og 215 mm.

Endelig er af samme Art erholdt under «Michael Sars»s 2det Togt 23de Juli 1901 fra en Dybde af 130 Meter et yngre Expl. (Totall. 110 mm) fra Banken syd for Beeren Eiland; Bundtemperaturen var her $+0,5^{\circ}$.

De mindste af disse Unger ere i alle væsentlige Henseender saa overensstemmende med Malmgrens Typ-Exemplar fra 1864, at de maa ansees som identiske med denne Art.]

Skjønt saaledes alene et enkelt af disse Individer tilhører den norske Faunas Omraade, meddeles dog nedenfor en Del spredte Bemærkninger, hentede væsentlig fra det større Materiale fra Spitsbergen, om denne i sin Helhed hidtil lidet kjendte Art.

Diagnose. For de foreliggende Individer, hvoraf det største har en Totall. af 215 mm, kan opstilles følgende Diagnose:

Farven hos de yngre graagul eller gulhvid med omkring 8 sadelformige mørke Tverbaand, der ere mørkest i Randene, og som afvexle med ligesaa mange (smalere) lyse Tverbaand af Bundfarven. Over Nakken strækker sig hos de fleste et kort lysere Baand (Nakkebaandet). Det 6te Sadelbaand naar i Regelen til Analen.

Hos de ældre ere Sadelbaandene utydelige nedenfor Sidelinien; Bugen graabrun, hos enkelte Ind. næsten ligesaa mørk som Sadelbaandene.

Anus ligger i Regelen under 3die Sadelbaand, og hos de ældre omtrent i Midten af Totallængden (1 : 2,0), hos de yngre lidt foran Midten (1 : 2,2).

Skjælbeklædning: Legemet skjælbeklædt; nøgent er Hovedet, Nakken, Bugen og Finnerne, samt Grunden under de forreste Dorsalstraaler. Unger under 60 mm ere nøgne; hos Individer med en Totall. af omtr. 120 mm er Skjælbeklædningen complet.

Hovedet indeholdes i Totallængden omkring 4 Gange (3,8—4,3), Pectoralen (hos de ældre) 7—7½ Gange i denne. Mundvinkelen naar til Lindsens Forrand.

Sidelinien medio-lateral.

Appendices pyloricae 2.

Størrelse: Totall. 215 mm (og derover).

Straaleantallet: D. omkring 90; A. omkring 70; P. 17, undertiden 18; M. B. 6.

Synonymær. I et fortjenstfuldt Arbeide over nogle nye Arter af Slægten *Lycodes* har Dr. Jensen¹ kortelig characteriseret under Navn af *L. celatus* (og *L. celatus var. spitsbergensis*) 5 smaa Expl. af en *Lycodes*, som synes at udgjøre Ungdomsstadierne af *L. rossii*, en Mening, hvortil Dr. Jensen ogsaa er kommet.

Disse Exemplarer (der saaledes udgjør Typerne for hans *L. celatus*), stamme fra Kara-Havet og Spitsbergen. De første, 3 i Antal, optoges under den danske «Dijmphna»-Expedition 1882—83, og ere af Lütken² omhandlede (under Tvivl) som Ungdomsformen af *L. reticulatus*, Reinh. Deres Totall. var 66—108 mm.

¹ Vid. Medd. Naturh. Foren. Kbh., 1901, p. 208 og 209.

² «Dijmphna»-Togtets Zoologisk-Botanske Udbytte. Lütken, Kara-Havets Fiske, p. 136, Pl. XVII, Fig. 4—5. (Kbhvn. 1887.)

Exemplarerne fra Spitsbergen, der vare 2, erholdtes under de, under Dr. Knipowitsch's Ledelse, foretagne Expeditioner til Spitsbergen i 1899—1900, og optoges i Storfjorden (fra iskoldt Vand). De ere nøiere omhandlede af Dr. Knipowitsch¹ ligeledes (med Tvivl) under Navn af *L. reticulatus*, Reinh. Disse Expl. havde en Totall. af 68^{mm} og 75,8^{mm}.

Om Typ-Exemplaret af L. rossii. Denne Art blev opstillet i 1864 af Malmgren efter 2 Yngel-Individer, det største med en Totall. af 32^{mm}, optagne under den første svenske Polar-Expedition ved Treurenberg-Bay (paa Nordsiden af Spitsbergen) i 1861. Af disse 2 Individer eksisterer nu blot det største, der opbevares i Riks-Museum i Stockholm.

Om dette Exemplar, hvilket jeg ved Prof. Smitts Velvilje har havt Leilighed til at undersøge nøiere, har jeg gjort følgende Optegnelser:

L. rossii er en spæd Unge, der paa gulhvid Bundfarve var forsynet med 8 brede, sadelformige, nedtil afrundede Tverbaand. Huden var (endnu) nøgen.

Det forreste af disse Tver- eller Sadelbaand var adskilt fra Panden ved et ubetydeligt lysere Bånd (Nakkebaand), idet den tilgrænsende Del af Panden var mørkt pigmenteret. Alle Tverbaand overskride Legemets Midtlinie, men først det 6te naar helt ned til Analen. Tverbaandene have iøvrigt nærmest Characteren af Ringe, der ere mørke i Randen, men lysere i Midten; disse Rande fortsatte sig ogsaa ud over Dorsalen (i dennes forreste Del).

¹ Ann. Mus. Zool. Acad. Imp. Sci. St. Petersb. T. VI, 1901, p. 80.

8 — Archiv for Math. og Naturv. B. XXV.

Trykt 20. Februar 1903.

Af andre Characterer hos Typ-Exemplaret kunne mærkes, at Mundvinkelen naar til Lindsens Forrand; en Side-linie er ikke udviklet.¹

Totallængden er 32 mm; Hovedets Længde 8 mm, saaledes at dette indeholdes 4 Gange i Totallængden. Snude-spidsens Afstand fra Anus er 15 mm.

Anus ligger under Forranden af 3die Tverbaand, og saaledes noget foran Legemets Midte (Legemets præ-anale Parti indeholdes i Totallængden 2,13 Gange.)

Straaleantallet angives af Malmgren at have været: D. 87; A. 68; P. 19. M. B. 6.

Lycodes lütkenii, Coll., 1880, Blev opstillet² efter et enkelt, fuldt udvoxet Individ, optaget under «Nordhavs-Expeditionen» i Havet vest for Norsk-Øerne, Spitsbergen, 14de August 1876. Dybden var 860 Meter, Temperaturen paa Bunden $\div$ 1,0 °C.

Dette Ind., der opbevares i Christiania-Museet, var en Hun, og havde en Totall. af 360 mm.; det er nærmere beskrevet³ og afbildet i General-Beretningen om Nordhavs-Expeditionen, p. 103.

Det er sandsynligt, at et større Materiale end det, hvortil jeg hidtil har havt Adgang, vil vise, at *L. lütkenii* udgør det fuldt udvoxede Stadium af *L. rossii*.

¹ En Figur af *L. rossii* (i dobbelt Størrelse) er i 1895 meddelt af Prof. Smitt i Scandinav. Fiskar, 2 Uppl., p. 612 (Stockh. 1895); en anden Figur (i naturlig Størrelse) har jeg givet i Vid.-Selsk. Skr., Chr.a 1899, math.-nat. Classe No. 6, p. 9. (Chr.a 1899.)

² Den Norske Nordhavs-Expedition 1876—1878. Zoologi. Fiske, p. 103, Pl. III, Fig. 25. (Christiania 1880.)

³ I den forelobige Beretning om Expeditionens Udbytte (Forh. Vid. Selsk. Chr.a 1878, No. 14, p. 59) omhandles Individet under Navn af *L. reticulatus*, Reinh.

Sammenlignet med *L. rossii* har *L. lütkenii* en mere sammentrængt Legemsbygning, ligesom specielt Pectoralerne er forholdsvis større; disse indeholdes i Totall. blot $5\frac{1}{2}$ Gange, medens Forholdet hos de største foreliggende Individer af *L. rossii* er som 1 til 7 eller $7\frac{1}{2}$.

Men Individets hele Habitus, Skjælbeklædningens Udstrækning, den medio-laterale Sidelinie, de 2 *App. pyloricae*, samt Farven (forsaavidt denne kan sees) synes at være særdeles overensstemmende hos de to Arter; og Pectoralerne, som hos *L. lütkenii* vistnok ere store i Forhold til Totallængden, ere neppe synderlig forskellige i Forhold til Legemshøiden hos de to Arter.

De nye Individer fra «Michael Sars»-Togterne danne tilsammen en næsten uafbrudt Række fra de spæde Unger indtil den kjønsmodne Alder, hvori alle Artens Characterer (inden denne Række) kunne erkjendes.

Af disse Individer er det ene, som ovenfor nævnt, optaget (fra iskoldt Vand) i Porsangerfjorden 24de Aug. 1900; de øvrige, hvis Antal er 32, optoges alle paa 1 nær i et enkelt Kast med Travlen ved Green Harbour (Isefjord), Spitsbergen, 26de Juli 1901, saaledes ikke langt fra det Sted, hvor Artens Typ-Exemplar erholdtes i 1861 (eller 40 Aar tidligere). Det sidste Individ erholdtes paa Banken syd for Beeren Eiland 23de Juli 1901.

Disse 33 Ind., der saaledes alle ere optagne i Sommermaanederne Juli og August paa Strækningen mellem Spitsbergen og Norges Nordkyst, kunne efter Størrelsen grupperes i 5 Stadier, der maa antages at repræsentere forskellige Kuld. Disse ere følgende:

A. Totall. 55^{mm}—61,5^{mm} (2 smaa Unger fra Isefjord).

Disse ere i alle Henseender byggede og farvede som Malmgrens Typ-Exemplar.

	a.	b.
Totallængde.....	55 ^{mm}	61,5 ^{mm}
Hovedets Længde...	13 »	14,5 »
Snudespids til Anus	23,5 »	27 »

Skjælbeklædning mangler endnu hos det mindste Exemplar, men er paa det større frembrudt paa Forkroppen ovenfor Midtlinien.

Legemets Sadelbaand og deres Udbredelse ere som hos Typ-Exemplaret; det mindste Expl. har 8, det større 9 saadanne (medregnet den mørke Halespids).

Baandenes mørke Farve er stærkest i Dorsalen, saaledes at Doralens Rand i de 3 forreste Baand er næsten sort.

Anus ligger under Forranden af det 3die Sadelbaand; det 6te Baand naar helt ned til Analen.

Nakkebaandet er distinct hos begge.

Sidelinien er medio-lateral, og allerede tydelig helt ud til Halespidsen hos det mindste Exemplar.

Hos disse smaa Unger indeholdes Hovedets Længde i Totallængden 4,2 Gange, Snudespidsens Afstand fra Anus (det egentlige Legeme) 2,3 og 2,2 Gange i Totallængden.

Pectoralen indeholdt 19 Straaler.

B. Totall. 87^{mm}—110^{mm} (20 noget større Unger fra Beeren Eiland-Banken og Isefjord.)

Sadelbaandene ere hos alle tydelige, i Regelen 8, undertiden 7 (med Antydning til 8 eller 9).

Anus ligger i Regelen under den forreste Del af 3die Sadelbaand, undertiden (hvor Baandenes Antal er stort) under Bagranden af 3die, eller under Mellemrummet mellem 3die og 4de Baand.

Skjælbeklædningen er hos de fleste complet. Nøgent er dog endnu næsten hele 1ste Sadelbaand (saaledes Nakken og Grunden under de forreste 3—5 Dorsalstraaler).

Udmaaling af et typisk Exemplar af denne Gruppe:

Totallængde.....	92	mm
Hovedets Længde.....	21,5	»
Snudespids til Anus	41	»
Legemets Høide	12	»

Hovedet indeholdes saaledes ogsaa her 4,2 Gange, Legemets Længde til Anus 2,2 Gange i Totallængden.

C. Totall. 115^{mm}—128^{mm}. (5 Expl. fra Porsangerfjord og Isefjord.)

Sadelbaandene ere som hos de yngre Stadier (Antallet hos et Ind. blot 6, hos et andet 10). Hos et Individ ere Baandene næsten sammenløbende nedtil, saaledes at dette Ind. ligesaa vel kunde beskrives med brungraa Bundfarve, og 6—7 nedstigende hvidgule Tverbaand.

Hos et (mørkfarvet) Ind. staa talrige kulsorte Pigmentpuncter strøede ud hist og her over Legemet.

Hos 2 (lyse) Individier er Nakkebaandet utydeligt.

Udmaalinger af et typisk Individ:

Totallængde.....	128	mm
Hovedets Længde.....	31	»
Snudespids til Anus	58	»
Legemets Høide	16	»

Hos dette Individ indeholdes saaledes Hovedets Længde 4,1 Gange, og Legemets Længde til Anus 2,2 Gange i Total-længden.

Exemplaret fra Porsangerfjorden var i alle Henseender ligt Rækken fra Spitsbergen.

Totallængde.....	124 mm
Hovedets Længde.....	30 »
Snudespids til Anus	57 »
Legemets Høide	13 »

Hos dette Expl. indeholdes saaledes Hovedets Længde 4,1 Gange, Legemets Længde til Anus 2,1 Gange i Total-længden.

Sadelbaandenes Antal var her 9, Nakkebaandet særdeles distinct.

Bundfaryen lys, og Baandenes indre Dele betydeligt lysere end Randene. Ingen af Baandene løbe sammen nedenfor Midtlinien, men bevare over hele Halen Characteren af Baand. Først 7de Baand naar helt ned til Analen, men blot 8de og 9de fortsætte sig ud over denne, og danne saaledes 2 complete Baand over Halespidsen.

Anus ligger her under Bagranden af 3die Sadelbaand.

Skjælbeklædningen typisk; nøgent er Hovedet, Nakken, Grunden omkring de forreste Dorsalstraaler, samt Finnerne og Bugen. Fortil danner Skjælbeklædningen en Kile, der ender omtrent ret under Dorsalens Udspring.

Pectoralerne tælle 18 Straaler.

D. Totall. 150 mm — 165 mm. (3 Expl. fra Isefjord.)

Baandene i det hele som hos de yngre; hos et Expl. ere de dog helt sammenløbende nedtil, saaledes at Legemet

her bliver graabrunt med skarpt ansatte hvide Tverbaand, der standse allerede ved Sidelinien.

Nakkebaandet er hos 2 Expl. utydeligt, hos det 3die opløst i runde, mørkrandede Pletter.

Udmaalinger af det største Ind., en Han (med lidet udviklede Testes):

Totallængde.....	166 mm
Hovedets Længde.....	43 »
Snudespids til Anus	80 »
Legemets Høide	15 »

Hos dette Expl. indeholdes saaledes Hovedets Længde 3,8 Gange, Legemets Længde til Anus 2,0 Gange i Total-længden.

E. Totall. 198^{mm}—215^{mm}. (3 større Ind., med fuldt udviklede Generationsorganer, fra Isefjord.)

Disse Individuer ere de største i den foreliggende Række af denne Art.

Farven hos disse Individuer er i det hele kun i ringe Grad forskjellig fra de yngres (og Typ-Expl.).

Legemet er forsynet med 8—9 mørkt graabrune sadelformige Tverbaand, afvejlende med ligesaa mange hvide, noget smalere Tverbaand.

Sadelbaandene løbe ud over Dorsalen i hele dennes Længde, men ere i Analen blot antydende i Spidsen. Deres Rande ere mørkere end deres øvrige Del, og ere i Dorsalen næsten brunsorte (ligesom hos Ungerne).

Nedenfor Legemets Midtlinie ere Sadelbaandene næsten ganske sammenflydede, saa Legemet her er næsten ensfarvet graabrunt.

Over Nakken løber et hvidagtigt Tverbaand, undertiden opløst i Pletter (eller utydeligt).

Bugen er lysfarvet (uden den hos mange *Lycodes*-Arter characteristiske blaa Farve).

Pectoralerne talte 18 til 19 Straaler.

Udmaalinger:

	Han	Hun
Totallængde	198 mm	215 mm
Hovedets Længde . . .	48 »	49 »
Snudespids til Anus..	96 »	105 »
Legemets Høide	25 »	29 »
Pectoralens Længde .	26 »	30 »

Hovedet indeholdtes hos Hannen 4,1, hos Hunnen 4,3 Gange i Totallængden, Legemets Længde til Anus hos begge en Ubetydelighed over 2 Gange i Totallængden.

Legemsproportionerne er saaledes næsten ganske de samme hos begge Individer, skjønt de ere af forskjellige Kjøen, og tillige næsten fuldstændigt overensstemmende med Forholdene hos Individerne af de yngre Rækker. Halepartiet er alene bleven ubetydeligt forkortet, saaledes at Anus hos de største Individer ligger næsten i Midten af Total-længden, hos de yngre lidt foran Midten.

Skjælbeklædningen, som hos disse Individer maa an-sees som complet, har i det hele en mindre Udstrækning, end hos flere andre Lycoder. Den dækker hele Halepartiet og skyder sig paa det egentlige Legeme frem i en Tunge, der standser omtrent under Begyndelsen af Dorsalen, eller ubetydeligt bagenfor denne.

Nøgent er saaledes Hovedet og Nakken, Bugen og Fin-nerne; desuden er Grunden under de forreste 5—6 Dorsal-straaler uden Skjæl.

Generations-Organer. Det ene af de 3 største Expl. var en Han, hvis Testes dog ikke vare i fuld Udvikling. De øvrige (største) Individer vare Hunner; Ovariet indeholdt Æg, der dog endnu ikke vare fuldmodne.

Ventriklerne indeholdt fordøiede Crustaceer; hos et Individ (Totall. 166 mm) fandtes saaledes Dele af en stor *Hippolyte*.

Parasiter. De mindste Unger vare uden Parasiter; men de fleste yngre Individer (Totall. 80—130 mm) havde en eller flere Anchoreller i forskellige Udviklings-Stadier fæstede til Pectoralernes indre Side. Hos flere af de midsstore Exemplarer fandtes de ligeledes, men manglede hos de 3 største Individer.

Udbredelse. Bortseet fra alle tvivlsomme Synonymer er *L. rossii* (= *L. celatus*, Jens., 1901) hidtil fundet i den Del af Ishavet, som omfatter Grønland, Spitsbergen, Havet mellem Norges Nordkyst og Kara-Havet. Bundtemperaturen har varieret mellem iskoldt Vand (indtil $\div 1,6^{\circ}$), og tempereret (indtil $+ 1,1^{\circ}$).

De specielle Localiteter er følgende:

1. *Spitsbergens Nordkyst*. Herfra stammer Typ-Individet, en spæd Unge, optaget ved Treurenberg-Bay Aug. 1861. Totall. 32 mm. Dybden $9\frac{1}{2}$ Meter.
2. *Spitsbergens Vestkyst*.
 - a. 31 Individer, optoges under «Michael Sars»s 2det Togt 26de Juli 1901 i Isefjorden. Totall. 55 mm — 215 mm. Bundtemp. $+ 1,1^{\circ}$. Dybden 140 Meter.
 - b. 2 Unger optoges af Dr. Knipowitsch i Storfjorden Juli 1899 og Juli 1900. Totall. 68 mm og 75,8 mm. Bundtemp. $\div 0,7^{\circ}$ og $\div 1,6^{\circ}$. Dybden 70—135 Meter.

3. *Beeren Eiland-Havet*. 1 ungt Ind., optaget under «Michael Sars»s 2det Togt 23de Juli 1901. Totall. 110 mm. Bundtemp. $+0,5^{\circ}$. Dybden 130 Meter.
4. *Norges Nordkyst*. 1 ungt Ind., optaget i Porsangerfjord under «Michael Sars»s 1ste Togt 24de Aug. 1900. Totall. 124 mm. Dybden 100 Meter.
5. *Kara Havet*. 3 unge Ind., erholdte under «Dijmphna»-Togtet i Kara-Havet 1ste Februar 1883. Totall. 66^{mm}—108^{mm}. Dybden 110 Meter.

Hertil kommer som Localitet No. 6 *Grønland*, hvor Exemplarer ere indsamlede af Dr. Kolthoff i Juli 1900 fra en Dybde af 300 Meter. Disse Expl. ere af Prof. Smitt¹ nøiere omhandlede under Navn af *L. reticulatus* i 1901, men ere af Dr. Jensen, der har underkastet dem en fornyet Undersøgelse i Stockholm i Februar 1902, fundne at henhøre under *L. rossii* (forsaavidt disse 2 Arter i Virkeligheden ville vise sig at være distincte).

¹ Bih. K. Svenska Vet. Akad. Handl. B. 27. Afd. IV, No. 4, p. 33. (Stockh. 1901.)

MINDRE MATHEMATISKE MEDDELELSER

AF

AXEL THUE

III. RÆKKE

- I. BEVIS FOR AT $\text{tg}(1)$ IKKE ER RATIONAL.
- II. BEVIS FOR CIRKELDELINGSLIGNINGENS IRREDUKTIBILITET.
- III. UDVIKLING AF ET PAR TALTHEORETISKE SATSER.
- IV. EN HURTIG BESTEMMELSE AF SUMMEN: $f(1) + f(2) + \dots + f(n)$.
- V. ET THEOREM OM RØDDERNE I VISSE HELE FUNKTIONER.
- VI. ET PAR BEMÆRKNINGER OM EN ART KOMPLEXE RODSTØRRELSER.
- VII. OM EN ROTATIONSFORMIG NETFLADE MED ENSARTEDE SEXSIDEDE MASKER.
- VIII. ELEMENTÆRT BEVIS FOR AT LIGNINGEN $x^4 - 2^n y^4 = 1$ ER ULØSBAR I HELE TAL x , y OG n , NAAR $y > 0$.

ARCHIV FOR MATHEMATIK OG NATURVIDENSKAB. B. XXV, NR. 3.



KRISTIANIA
ALB. CAMMERMEYERS FORLAG

1903

Morten Johansens Bogtrykkeri. — Kristiania 1903.

Mindre matematiske meddelelser. III.

I.

Bevis for at $\tan(1)$ ikke er rational.

Ved partiel integration faaes:

$$\begin{aligned} p \int x^{(n+1)p-1} \cdot \cos x^p dx &= \int x^{np} \cdot d \sin x^p = \\ &= x^{np} \sin x^p - np \int x^{np-1} \cdot \sin x^p dx \end{aligned}$$

Videre blir:

$$\begin{aligned} p \int x^{np-1} \cdot \sin x^p dx &= - \int x^{(n-1)p} \cdot d \cos x^p = \\ &= - x^{(n-1)p} \cdot \cos x^p + (n-1)p \int x^{(n-1)p-1} \cdot \cos x^p dx \end{aligned}$$

og altsaa:

$$\begin{aligned} p \int x^{(n+1)p-1} \cdot \cos x^p dx &= \\ x^{np} \sin x^p + nx^{(n-1)p} \cdot \cos x^p - n(n-1)p \int x^{(n-1)p-1} \cdot \cos x^p dx \end{aligned}$$

Er n et helt positivt tal, saa faaar man ved successive anvendelse af denne ligning:

$$\begin{aligned}
 & p \int x^{(n+1)p-1} \cdot \cos x^p dx = \\
 (\alpha) \quad & \left\{ \begin{aligned} & \sin x^p [x^{np} - (n)(n-1)x^{(n-2)p} + \dots] + \\ & + \cos x^p [nx^{(n-1)p} - (n)(n-1)(n-2)x^{(n-3)p} + \dots] + C \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Sættes heri

$$p = \frac{1}{n+1},$$

hvor n er lige, saa fremkommer ligningen:

$$\begin{aligned}
 (\beta) \quad & \frac{1}{(n+1) \cos(1)} \int_0^1 \cos x^{\frac{1}{n+1}} dx = \\
 & \operatorname{tg}(1) [1 - (n)(n-1) + (n)(n-1)(n-2)(n-3) - \dots] + \\
 & + [n - (n)(n-1)(n-2) + (n)(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) - \dots]
 \end{aligned}$$

Var nu

$$\operatorname{tg}(1) = \frac{a}{b},$$

hvor a og b er hele tal, saa blev:

$$(\gamma) \quad \left\{ \begin{aligned} & a [1 - (n)(n-1) + \dots] + bn [1 - (n-1)(n-2) + \dots] = \\ & = \frac{b}{(n+1) \cos(1)} \int_0^1 \cos x^{\frac{1}{n+1}} dx \end{aligned} \right.$$

Da venstre side i denne ligning altid er et helt tal for alle hele værdier af n , og man jo kan vælge n saa stor, at ligningens høire side falder mellem 0 og 1, saa maa ligningen følgelig være umulig i hele tal a og b .

$\operatorname{tg}(1)$ er altsaa ikke rational.

At man kan finde værdier af n over enhver opgiven grændse og for hvilke venstre side i (γ) ikke blir nul, kan indsees uden at betragte ligningens høire side.

Gjør man nemlig $n > a$, saa kan n ikke gaa op i a , og nævnte side altsaa ikke være lig nul.

Sats: *Er p og q to indbyrdes primtal, da kan ikke baade $\text{tg } p$ og $\text{tg } q$ være rationale.*

Da p og q er indbyrdes primtal, kan man bestemme to saadanne hele tal n og m at:

$$pn - qm = 1.$$

Da videre $\text{tg}(a + b)$ er rational, naar baade $\text{tg } a$ og $\text{tg } b$ er rationale, saa blir $\text{tg}(pn)$ og $\text{tg}(qm)$ ogsaa rationale, naar saa er tilfælde med baade $\text{tg } p$ og $\text{tg } q$, og altsaa ogsaa

$$\text{tg}(pn - qm) = \text{tg}(1).$$

Men at dette er umulig, har vi ovenfor bevist.

II.

Bevis for cirkedelingsligningens irreduktibilitet.

Idet p er et vilkaarligt primtal, skal vi godtgjøre, at ligningen:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1} = \alpha(x) \cdot \beta(x)$$

ikke kan tilfredsstilles i to hele funktioner α og β med hele koefficienter, naar begge skal være af lavere grad end $p - 1$.

Isaafald blev:

$$\alpha(1) \cdot \beta(1) = p.$$

Et af tallene $\alpha(1)$ og $\beta(1)$ var altsaa lig ± 1 , og det andet lig $\pm p$.

Var ligningen mulig, da fandtes der saaledes to hele funktioner $P(x)$ og $Q(x)$ af x med hele koefficienter og af lavere end $p - 1$ 'te grad og saaledes at:

$$U(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = P(x) \cdot Q(x) \quad (1)$$

$$P(1) = 1, \quad Q(1) = p. \quad (2)$$

$$\text{Sættes} \quad x - 1 = y$$

i ligningen:

$$U(x) = \frac{[(x - 1) + 1]^p - 1}{x - 1},$$

saa faaes:

$$U(x) = \frac{(y + 1)^p - 1}{y} = y^{p-1} + p \cdot R(y),$$

hvor $R(y)$ er en hel funktion i y med hele koefficienter.

Er følgelig n et helt tal, som er mindre end $p - 1$,

$$\text{saa blir} \quad U^{(n)}(1) = p \cdot R^{(n)}(0). \quad (3)$$

For ethvert helt positivt n , som er mindre end $p - 1$,
blir altsaa $U^{(n)}(1)$ et med p deleligt helt tal.

Vi skal saa bevise, at for $x = 1$ blir alle deriverte af
 $Q(x)$ hele tal, som er delelige med p .

Af (1) erholdes successive:

$$U'(x) = P(x) Q'(x) + P'(x) Q(x)$$

$$\begin{aligned} U^{(n)}(x) &= P(x) Q^{(n)}(x) + a_1 P'(x) Q^{(n-1)}(x) + \dots + \\ &+ a_n P^{(n-1)}(x) Q'(x) + P^{(n)}(x) \cdot Q(x), \end{aligned}$$

eller, om x sættes lig 1 og $P(1)$ erstattes med 1:

$$U'(1) = Q'(1) + P'(1) Q(1)$$

$$\begin{aligned} U^{(n)}(1) &= Q^{(n)}(1) + a_1 P'(1) Q^{(n-1)}(1) + \dots + \\ &+ a_n P^{(n-1)}(1) Q'(1) + P^{(n)}(1) Q(1), \end{aligned} \quad (4)$$

hvor koefficienterne a er hele tal.

For ethvert helt $n < p - 1$ blir nu, som før sagt, $U^{(n)}(1)$ et med p deleligt helt tal.

Er derfor

$$Q(1), Q'(1), \dots, Q^{(n-1)}(1)$$

hele med p delelige tal, saa maa efter sidste ligning det samme blive tilfælde med $Q^{(n)}(1)$.

Da satsen gjælder for $n = 1$, maa den saaledes ogsaa gjælde for enhver hel værdi af $n < p - 1$ og altsaa ogsaa for enhver hel positiv værdi af n .

Da for $x = 1$ samtlige deriverte af Q blir hele med p delelige tal og altsaa mere specielt ogsaa den m 'te derivate, hvor m er graden af Q , saa indser man, at koefficienten for den høieste potens af x i Q og saaledes ogsaa de øvrige koefficienter blir hele med p delelige tal.

Da dette imidlertid medfører, at alle koefficienter i U og specielt koefficienten 1 for den høieste potens af x i samme blir delelig med p , saa maa selvfølgelig (1) være umulig, og U altsaa en irreduktibel funktion.

III.

Udvikling af et par taltheoretiske Satser.

Sats: *Ethvert primtal p af formen $8n + 1$ eller $8n + 7$ gaar altid op i*

$$2^{\frac{p-1}{2}} - 1,$$

og ethvert primtal p af formen $8n + 3$ eller $8n + 5$ altid op i

$$2^{\frac{p-1}{2}} + 1.$$

Beviset for denne fra teorien om de kvadratiske rester
bekjendte sætning kan føres saaledes:

Vi har:

$$\begin{aligned}(1+i)^p &= (1+i)(2i)^{\frac{p-1}{2}} = 2^{\frac{p-1}{2}} \left[i^{\frac{p-1}{2}} + i^{\frac{p+1}{2}} \right] = \\ &= 1 + i^p + p[A + iB],\end{aligned}$$

hvor A og B er hele reelle tal.

Var nu $p = 8n \pm 1$, saa blev

$$1 \pm i + p[A + iB] = 2^{\frac{p-1}{2}} [1 \pm i]$$

eller

$$p[A + iB] = [2^{\frac{p-1}{2}} - 1] [1 \pm i]$$

eller endelig:

$$\begin{aligned}pA &= 2^{\frac{p-1}{2}} - 1 \\ \pm pB &= 2^{\frac{p-1}{2}} - 1.\end{aligned}$$

Var derimod $p = 8n \pm 3$, saa fik man:

$$\begin{aligned}1 \mp i + p[A + iB] &= 2^{\frac{p-1}{2}} [-1 \pm i] \\ p[A + iB] &= [2^{\frac{p-1}{2}} + 1] [-1 \pm i],\end{aligned}$$

hvoraf Satsen.

Af udtrykket for A, faar man, enten det ulige tal p
er primtal eller ikke

$$\begin{aligned}1 - \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} + \frac{p(p-1)p-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (p-3) - \dots = & \left. \begin{aligned} &= (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \frac{p-1}{2^{\frac{p-1}{2}}} \end{aligned} \right\} (1)\end{aligned}$$

Da altsaa 2 er kvadratisk rest af alle primtal af formen $8n \pm 1$, saa vil man altid kunne bestemme et saadant helt tal x , at $x^2 - 2$ blir delelig med primtallet.

Da videre baade 2 og -1 er kvadratisk rest af alle primtal af formen $8n + 1$, saa kan man her bestemme et saadant helt tal x , at $x^2 + 2$ blir delelig med primtallet.

Da endelig 2 og -1 begge er kvadratisk ikke-rest af alle primtal af formen $8n + 3$, saa vil man ogsaa her kunne bestemme et saadant helt tal x , at $x^2 + 2$ blir delelig med primtallet.

Efter en bekjendt sats maa folgelig alle primtal af formen $8n + 1$ eller $8n + 7$ kunne bringes paa den nye form $a^2 - 2b^2$ og alle primtal af formen $8n + 1$ eller $8n + 3$ paa formen $a^2 + 2b^2$.*

Man mærke sig, at de to former $\alpha^2 - 2\beta^2$ og $2\beta^2 - \alpha^2$ kan overføres i hinanden.

Vi har jo ligningen:

$$2b^2 - a^2 = (a^2 - 2b^2)(1^2 - 2 \cdot 1^2) = (2b + a)^2 - 2(b + a)^2.$$

Sats: *Ethvert primtal p af formen $12n + 1$ eller $12n + 11$ gaar op i*

$$3^{\frac{p-1}{2}} - 1.$$

Ligeledes gaar ethvert primtal p af formen $12n + 5$ eller $12n + 7$ op i

$$3^{\frac{p-1}{2}} + 1.$$

Er nemlig

$$\varrho^2 + \varrho + 1 = 0,$$

* Se Christiania videnskabselskabs forhandlinger for 1902, no. 7, pag. 11—13.

saa faar man jo:

$$[1 - \varrho]^p = (1 - \varrho) [1 - 2\varrho + \varrho^2]^{\frac{p-1}{2}} = (1 - \varrho) [-3\varrho]^{\frac{p-1}{2}}$$

eller

$$1 - \varrho^p + p[A + B\varrho] = 3^{\frac{p-1}{2}} [(-\varrho)^{\frac{p-1}{2}} + (-\varrho)^{\frac{p+1}{2}}],$$

hvor A og B er hele tal.

Var altsaa p af formen $12n + 1$, $12n + 11$, $12n + 5$ eller $12n + 7$, saa fik man henholdsvis:

$$1 - \varrho + p[A + B\varrho] = 3^{\frac{p-1}{2}} [1 - \varrho]$$

$$1 - \varrho^2 + p[A + B\varrho] = 3^{\frac{p-1}{2}} [-\varrho^2 + 1]$$

$$1 - \varrho^2 + p[A + B\varrho] = 3^{\frac{p-1}{2}} [\varrho^2 - 1]$$

$$1 - \varrho + p[A + B\varrho] = 3^{\frac{p-1}{2}} [-1 + \varrho]$$

eller

$$p[A + B\varrho] = [3^{\frac{p-1}{2}} - 1] (1 - \varrho)$$

$$p[A + B\varrho] = [3^{\frac{p-1}{2}} - 1] (-\varrho^2 + 1) = [3^{\frac{p-1}{2}} - 1] (2 + \varrho)$$

$$p[A + B\varrho] = [3^{\frac{p-1}{2}} + 1] (\varrho^2 - 1) = [3^{\frac{p-1}{2}} + 1] (-2 - \varrho)$$

$$p[A + B\varrho] = [3^{\frac{p-1}{2}} + 1] (-1 + \varrho).$$

For de nævnte fire forskellige former af p blev altsaa henholdsvis:

$$pA = 3^{\frac{p-1}{2}} - 1$$

$$pA = [3^{\frac{p-1}{2}} - 1] 2$$

$$pA = -[3^{\frac{p-1}{2}} + 1] 2$$

$$pA = -[3^{\frac{p-1}{2}} + 1].$$

Heraf satsen.

Paa lignende maade som ovenfor indser man, at ethvert primtal af formen $12n + 1$ eller $12n + 11$ har den nye form $\pm(a^2 - 3b^2)$, og at ethvert primtal af formen $12n + 1$ eller $12n + 7$ har formen $a^2 + 3b^2$.

Efter sidste sats er altsaa ethvert primtal af formen $6m + 1$ lig summen af et kvadrattal og det tredobbelte af et saadant.

Udvikler man $(1 - \varrho)^p$ efter binomialformelen, saa faaes ved ulige p :

$$(1 - \varrho)^p = 1 - \varrho^p + \alpha + \beta\varrho + \gamma\varrho^2,$$

hvor α , β og γ er summen af koefficienterne for de potenser af ϱ , hvis exponenter divideret med 3 henholdsvis giver resterne 0, 1 og 2.

Som man strax ser, blir $\gamma = 0$, naar det ulige tal p har formen $6m + 1$, og $\gamma = -\alpha$, naar p har formen $3m + 2$.

I første fald faar man for den ovenfor indførte størrelse A :

$$pA = \alpha.$$

Og i andet fald:

$$pA = 2\alpha.$$

Heraf erhoides atter ligningen:

$$1 - \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + (-1)^q \frac{p(p-1) \dots (p-3q+1)}{1 \cdot 2 \dots (3q)} + \left. \begin{aligned} &+ \dots = \pm 3^{\frac{p-1}{2}}, \end{aligned} \right\} (2)$$

hvor tegnet paa høire side blir plus eller minus, eftersom p har formen $12n \pm 1$ eller $12n \pm 5$.

IV.

En hurtig bestemmelse af summen:

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n).$$

Er

$$F(x+1) - F(x) = f(x), \quad (1)$$

saa faaes:

$$F(2) - F(1) = f(1)$$

$$F(3) - F(2) = f(2)$$

— — — — —

$$F(n+1) - F(n) = f(n)$$

og heraf ved addition:

$$S = f(1) + f(2) + \dots + f(n) = F(n+1) - F(1) \quad (2)$$

For at bestemme S behøver man altsaa blot at finde en funktion $F(x)$, som tilfredsstillter (1).

Er:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m, \quad (a)$$

hvor koefficienterne a har vilkaarlig opgivne værdier, da kan man finde et og kun et sæt koefficienter A , saaledes at

$$F(x) = A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_{m+1} x^{m+1} \quad (\beta)$$

tilfredsstillter (1).

Denne koefficientbestemmelse falder imidlertid, som vi skal se, særlig let, naar $f(x)$ enten bare indeholder lige potenser af x eller bare ulige potenser.

Sats 1: *Er $f(x)$ en hvilkensomhelst hel funktion af m 'te grad i x indeholdende enten bare lige eller bare ulige potenser af argumentet, da kan man altid bestemme en hel funktion $U(y)$ af $m + 1$ 'te grad i y saaledes, at*

$$U(2x + 1) - U(2x - 1) = f(x) \quad (3)$$

og saaledes, at $U(y)$ indeholder bare ulige eller lige potenser af y , eftersom $f(x)$ indeholder bare lige eller ulige potenser af x .

Først kan man nemlig bestemme en saadan hel funktion $F(x)$ af $m + 1$ 'te grad i x , at:

$$f(x) = F(x + 1) - F(x) \quad (4)$$

Derpaa kan vi bestemme en saadan hel funktion $R(y)$ af $m + 1$ 'te grad i y , at:

$$F(x) = R(2x - 1).$$

Idet $P(y)$ betegner summen af alle de led i $R(y)$, som indeholder y i en lige potens, og $Q(y)$ summen af alle de resterende led, saa blir altsaa

$$F(x) = P(2x - 1) + Q(2x - 1).$$

Indsættes dette i (4) faaes saaledes:

$$f(x) = P(2x + 1) - P(2x - 1) + Q(2x + 1) - Q(2x - 1) \quad (5)$$

$$f(-x) = P[-(2x - 1)] - P[-(2x + 1)] + Q[-(2x - 1)] - Q[-(2x + 1)]$$

eller

$$f(-x) = -P(2x + 1) + P(2x - 1) + Q(2x + 1) - Q(2x - 1) \quad (6)$$

Indeholder $f(x)$ kun lige potenser af x , saa faar man af (5) og (6):

$$P(2x + 1) - P(2x - 1) = 0$$

$$f(x) = Q(2x + 1) - Q(2x - 1).$$

Var derimod $f(x)$ kun sammensat af ulige potenser af x , saa fik man af de samme ligninger:

$$Q(2x + 1) - Q(2x - 1) = 0$$

$$f(x) = P(2x + 1) - P(2x - 1).$$

Da

$$S = U(2n + 1) - U(1), \quad (7)$$

finder man — ved de nævnte funktioner $f(x)$ — summen S meget lettere ved at løse (3) istedenfor (1).

Medens nemlig $F(x)$ efter omstændighederne indeholder $2m$ eller $2m + 1$ koefficienter, saa indeholder $U(y)$ blot m eller $m + 1$ saadanne.

Findes der blot ulige potenser af x i $f(x)$, som er af $2m - 1$ 'te grad, saa har vi altsaa:

$$f(x) = U(2x + 1) - U(2x - 1),$$

hvor $U(y)$ kun indeholder lige potenser af y og er af $2m$ 'te grad.

Her blir saaledes:

$$U(y) = G(y^2)$$

eller

$$U(2x - 1) = G[(2x - 1)^2] = H(x^2 - x),$$

hvor $H(z)$ blot er af m 'te grad i z .

I det her nævnte tilfælde kan altsaa S bestemmes, idet man istedenfor (3) løser ligningen

$$f(x) = H(x^2 + x) - H(x^2 - x). \quad (8)$$

Vi faar da:

$$S = H(n^2 + n) - H(0). \quad (9)$$

Indeholdt $f(x)$ blot lige potenser af x , kunde S findes ved at løse ligningen:

$$f(x) = (2x + 1) H(x^2 + x) - (2x - 1) H(x^2 - x) \quad (10)$$

Man fik:

$$S = (2n + 1) H(n^2 + n) - H(0) \quad (11)$$

Er

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^3 + \dots + a_m x^{2m-1},$$

saa kan efter (8) S findes, idet man i ligningen:

$$\begin{aligned} F(x+1) - F(x) &= \\ = b_1 x [(x+1)^1 - (x-1)^1] + \dots + b_m x^m [(x+1)^m - (x-1)^m] &= \\ = a_1 x + a_2 x^3 + \dots + a_m x^{2m-1} \end{aligned}$$

bestemmer koefficienterne b slig, at ligningen gjælder for alle x .

Lad os ved hjælp af denne ligning til ex. finde

$$1^{13} + 2^{13} + \dots + n^{13}.$$

Vi har her:

$$x^{13} = b_1 x [(x+1) - (x-1)] + \dots + b_7 x^7 [(x+1)^7 - (x-1)^7].$$

Nu er imidlertid

$$\begin{aligned} b_q x^q [(x+1)^q - (x-1)^q] &= \\ = 2b_q x^q \left[\frac{q}{1} x^{q-1} + \frac{q(q-1)(q-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{q-3} + \dots \right] \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} x^{13} &= 2[b_1 x + b_2 x^2(2x) + b_3 x^3(3x^2 + 1) + b_4 x^4(4x^3 + 4x) + \\ &+ b_5 x^5(5x^4 + 10x^2 + 1) + b_6 x^6(6x^5 + 20x^3 + 6x) + \\ &+ b_7 x^7(7x^6 + 35x^4 + 21x^2 + 1)] = \\ &= 2[b_1 x + (2b_2 + b_3) x^3 + (3b_3 + 4b_4 + b_5) x^5 + \\ &+ (4b_4 + 10b_5 + 6b_6 + b_7) x^7 + (5b_5 + 20b_6 + 21b_7) x^9 + \\ &+ (6b_6 + 35b_7) x^{11} + (7b_7) x^{13}]. \end{aligned}$$

Heraf faaes:

$$\begin{aligned}
 7b_7 &= \frac{1}{2} \\
 6b_6 + 35b_7 &= 0 \\
 5b_5 + 20b_6 + 21b_7 &= 0 \\
 4b_4 + 10b_5 + 6b_6 + b_7 &= 0 \\
 3b_3 + 4b_4 + b_5 &= 0 \\
 2b_2 + b_3 &= 0 \\
 b_1 &= 0
 \end{aligned}$$

eller

$$b_7 = \frac{1}{14}, \quad b_6 = -\frac{5}{12}, \quad b_5 = \frac{41}{30}, \quad b_4 = -\frac{59}{21},$$

$$b_3 = \frac{691}{210}, \quad b_2 = -\frac{691}{420}, \quad b_1 = 0.$$

Sættes

$$x^2 - x = y \quad \text{og} \quad T(x^2 + x) - T(x^2 - x) = \triangle T(y),$$

$$\text{saa blir:} \quad \triangle \left[\frac{1}{2} y \right] = x^1$$

$$\triangle \left[\frac{1}{4} y^2 \right] = x^3$$

$$\triangle \left[\frac{1}{6} y^3 - \frac{1}{12} y^2 \right] = x^5$$

$$\triangle \left[\frac{1}{8} y^4 - \frac{1}{6} y^3 + \frac{1}{12} y^2 \right] = x^7$$

$$\triangle \left[\frac{1}{10} y^5 - \frac{1}{4} y^4 + \frac{3}{10} y^3 - \frac{3}{20} y^2 \right] = x^9$$

$$\begin{aligned}
 \triangle \left[\frac{1}{2n} y^n - \frac{(n-2)}{12} y^{n-1} + \frac{(n-1)(n-3)(7n-8)}{6!} y^{n-2} - \right. \\
 \left. \frac{(n-1)(n-2)(n-4)[31n^2 - 89n + 48]}{6 \cdot 7!} y^{n-3} + \right. \\
 \left. + \dots + \gamma y^3 + \beta y^2 + \alpha y \right] = x^{2n-1}
 \end{aligned}$$

Er $n > 1$, da er.

$$\alpha = 0 \quad \text{og} \quad \gamma = -2\beta.$$

Sætter vi

$$\triangle [b_2 y^2 + b_3 y^3 + \dots + b_n y^n] = x^{2n-1},$$

saa faaes ved i (12) for x at skrive 1 eller -1 :

$$2b_1 + 2^2b_2 + 2^3b_3 + 2^4b_4 + \dots + 2^nb_n = 1 \quad (13)$$

Indsætter vi i (12) $x = i$, saa erholdes den ret mærkelige ligning:

$$\left. \begin{aligned} & 2b_1 - 2^2b_2 + 2^2b_3 + \dots \\ & + (-1)^k [2^{2k+1}b_{4k+1} - 2^{2k+2}b_{4k+2} + 2^{2k+2}b_{4k+3}] + \dots \\ & = (-1)^{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

I denne ligning, hvori alle led b_{4h} mangler, er n den høieste af de til tallene b hørende index.

Er koefficienterne b^{n+1} defineret ved ligningen:

$$\triangle [b_1^{n+1} y + b_2^{n+1} y^2 + \dots + b_{n+1}^{n+1} y^{n+1}] = x^{2n+1}, \quad (15)$$

saa faaes, om denne deriveres to gange:

$$\begin{aligned} \triangle [(b_1^{n+1} + 2b_2^{n+1} y + 3b_3^{n+1} y^2 + \dots + (n+1)b_{n+1}^{n+1} y^n)(2x-1)] &= \\ &= (2n+1)x^{2n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle [(b_1^{n+1} + 2b_2^{n+1} y + \dots + (n+1)b_{n+1}^{n+1} y^n) 2 + \\ + (2 \cdot 1 b_2^{n+1} + 3 \cdot 2 b_3^{n+1} y + \dots + (n+1)n b_{n+1}^{n+1} y^{n-1} (4y+1))] &= \\ &= (2n+1)(2n)x^{2n-1}. \end{aligned}$$

Efter dette blir altsaa:

$$b_{q+1}^{n+1} = \frac{(2n+1)(n)}{(2q+1)(q+1)} b_q^n - \frac{q+2}{4q+2} b_{q+2}^{n+1} \quad (16)$$

Er i (α) $f(x) = x^m$, saa vil anden hver koefficient «A» i (β) med undtagelse af A_m blive lig nul, eller:

$$A_{m-2} = A_{m-4} = A_{m-6} = \dots = 0.$$

Da nemlig A_1 ifølge (12) blir lig nul for ethvert ulige m , som er > 1 , saa kan satsen udledes ved gjentagende gange at derivere (1) ved nævnte $f(x)$.

V.

Et theorem om rødderne i visse hele funktioner.

Er det hele tal S_m defineret ved ligningerne

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= aS_n + bS_{n-1} + \dots + hS_{n-k}, \quad S_0 = H, \\ S_1 &= K, \dots, S_k = A, \end{aligned}$$

hvor $a, b, \dots, h, A, \dots, K, H$ er hele tal, og et af disse tal S_m er lig nul, da findes der uendelig mange tal S , som er delelig med et hvilket som helst opgivel tal p , der er indbyrdes primtal med h .

For at bevise denne sats, sætter vi:

$$S_m = a_m \cdot p + R_m, \quad (1)$$

hvor a_m og R_m er hele tal, og

$$0 \leq R_m < p.$$

Vi faar da:

$$R_{n+1} \equiv aR_n + bR_{n-1} + \dots + hR_{n-k} \pmod{p} \quad (2)$$

Nu findes der, som man strax ser, ikke flere end p^{k+1} forskellige rækker $R_y, R_{y+1}, \dots, R_{y+k}$ af $k+1$ paa hinanden følgende rester R .

Er derfor $q + 1 > p^{k+1}$, og x et vilkaarligt helt tal, saa maa altsaa mindst to af de $q + 1$ rækker:

$$\begin{array}{cccccccc} R_x, & R_{x+1}, & \dots, & R_{x+(k+1)-1} \\ R_{x+(k+1)}, & R_{x+(k+1)+1}, & \dots, & R_{x+2(k+1)-1} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ R_{x+q(k+1)}, & R_{x+q(k+1)+1}, & \dots, & R_{x+(q+1)(k+1)-1} \end{array}$$

være identiske.

Der findes altsaa blandt tallene $x, \dots, x + q(k + 1)$ to saadanne tal r og s , at:

$$\left. \begin{array}{l} R_r = R_s \\ R_{r+1} = R_{s+1} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ R_{r+k} = R_{s+k} \end{array} \right\} \quad (3)$$

Efter (2) faaes videre heraf:

$$h[R_{r-1} - R_{s-1}] \equiv 0 \pmod{p},$$

eller, da p og h er indbyrdes primtal:

$$R_{r-1} = R_{s-1}. \quad (4)$$

Ved successive anvendelse af denne fremgangsmaade faar man mere almindelig:

$$R_{r-u} = R_{s-u}.$$

Eller, om man sætter $r - s = c$:

$$R_d = R_{d+mc},$$

hvor d og m er to vilkaarlig opgivne positive hele tal.

Var $R_d = 0$ eller S_d delelig med p , og p og h var indbyrdes primtal, saa blev følgelig S_{d+mc} ogsaa delelig med p for alle positive hele værdier af m .

Herved er satsen bevist.

Var $h = \pm 1$, saa blev h og p altid indbyrdes primtal.

Var videre i dette tilfælde $k + 1$ paa hinanden følgende tal S hele, da blev S_m altid et helt tal for alle positive og negative hele værdier af m .

Som et eksempel kan vi nævne rækken

$$0-1-1-2-3-5-8-13-\dots,$$

hvori ethvert tal er lig summen af de to forangaaende.

Havde vi nu ligningen

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + 1 = 0, \quad (5)$$

saa fik man

$$x^{n+m} + a_1 x^{n+m-1} + \dots + a_{n-1} x^{m+1} + x_m = 0,$$

hvor m kunde være et vilkaarligt positivt eller negativt helt tal.

Betegnet altsaa $\varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_n$ rødderne i (5), og man satte:

$$S_p = \varrho_1^p + \varrho_2^p + \dots + \varrho_n^p,$$

saa blev som bekjendt:

$$S_{n+m} + a_1 S_{n+m-1} + \dots + a_{n-1} S_{m+1} + S_m = 0. \quad (6)$$

Var koefficienterne hele og et af de hele tal S lig nul, saa fandtes der altsaa uendelig mange tal S , som var delelig med et hvilket som helst opgivet tal.

I forbindelse med ovenstaaende sats skal vi saa gennem et par eksempler antyde en teori om en vis klasse ubestemte og heterogene ligninger.

Lad $a_1 \dots a_n$ betegne rødderne i funktionen:

$$x^n - a_1 x^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} a_{n-1} x + (-1)^n,$$

hvor størrelserne a er hele tal, og lad os sætte:

$$S_p = a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p.$$

eller endelig:

$$\begin{aligned} x^3 + (1 - ab)y^3 + z^3 - (3 + ab)xyz - 2bx^2y + \\ + ax^2z + (a^2 + b)y^2z + (a + b^2)y^2x + bz^2x - 2az^2y = \\ = 4(a^3 + b^3) - a^2b^2 - 18ab + 27. \end{aligned}$$

Lad os saa ved et eksempel vise, hvorledes man i to variable kan danne heterogene ubestemte ligninger, som er løsbare i hele tal.

Idet a og β er rødderne i funktionen:

$$u^2 - au + 1,$$

hvor a er et helt tal, vil vi eliminere n mellem de to ligninger:

$$\begin{aligned} a^{2n} + \beta^{2n} + k(a^n + \beta^n) &= x \\ a^{2(n+1)} + \beta^{2(n+1)} + k(a^{n+1} + \beta^{n+1}) &= y, \end{aligned}$$

hvor k er et vilkaarligt helt tal.

Sættes heri

$$a^n = p, \quad \beta^n = q,$$

saa overføres ligningerne i følgende to nye:

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 + k(p + q) &= x \\ a^2p^2 + \beta^2q^2 + k(ap + \beta q) &= y. \end{aligned}$$

Multipliceres begge ligninger med p^2 , saa faaes, idet $pq = 1$:

$$\begin{aligned} p^4 + kp^3 - xp^2 + kp + 1 &= 0 \\ a^2p^4 + \alpha kp^3 - yp^2 + \beta kp + \beta^2 &= 0 \end{aligned}$$

eller efter *Sylvester's* methode ved elimination af p :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & k & -x & k & 1 \\ 0 & 0 & 1 & k & -x & k & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & -x & k & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & -x & k & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 & \alpha k & -y & \beta k & \beta^2 \\ 0 & 0 & \alpha^2 & \alpha k & -y & \beta k & \beta^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & \alpha k & -y & \beta k & \beta^2 & 0 & 0 \\ \alpha^2 & \alpha k & -y & \beta k & \beta^2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Lad os endelig som et sidste eksempel vise, hvorledes man kan skaffe sig en ubestemt ligning i tre variable ved at eliminere n mellem følgende tre ligninger:

$$\begin{aligned} \alpha^n + \beta^n &= x \\ \alpha^{(n+1)^2} + \beta^{(n+1)^2} &= y \\ \alpha^{(n+2)^2} + \beta^{(n+2)^2} &= z, \end{aligned}$$

hvor α og β har samme betydning som før.

Sættes

$$\alpha^n = p \quad \text{og} \quad \beta^n = q,$$

gaar ligningerne over i følgende:

$$\begin{aligned} p^n + q^n &= x \\ \alpha p^2 p^n + \beta q^2 q^n &= y \\ \alpha^4 p^4 p^n + \beta^4 q^4 q^n &= z. \end{aligned}$$

Multipliceres ligningerne henholdsvis med p^n , med p^{n+2} og med p^{n+4} , saa faaes:

$$\begin{aligned} p^{2n} + 1 &= p^n x \\ \alpha p^4 p^{2n} + \beta &= p^2 p^n y \\ \alpha^4 p^8 p^{2n} + \beta^4 &= p^4 p^n z, \end{aligned}$$

eller, om p^{2n} bortelimineres:

$$\alpha^2 p^8 - \alpha x y p^6 + (x^2 + y^2 - 2) p^4 - \beta x y p^2 + \beta^2 = 0$$

$$\alpha^6 p^8 - \alpha^3 y z p^6 + (y^2 + z^2 - 2) p^4 - \beta^3 y z p^2 + \beta^6 = 0.$$

Bortelimineres endelig p af disse ligninger, som begge er af fjerde grad med hensyn paa p^2 , saa faar man igjen en endeligning, som kun indeholder de variable x , y og z , som her blir hele tal.

VI.

Et par bemærkninger om en art komplekse rodstørrelser.

Lad $U(x_1 x_2 \dots x_n)$ være en saadan entydig funktion af de variable x , at man altid kan bestemme slige hele positive eller negative tal c og d , at:

$$U(a_1 a_2 \dots a_n) \pm U(b_1 b_2 \dots b_n) = U(c_1 c_2 \dots c_n)$$

og

$$U(a_1 a_2 \dots a_n) \cdot U(b_1 b_2 \dots b_n) = U(d_1 d_2 \dots d_n),$$

hvor tallene a og b er vilkaarlig opgivne positive eller negative hele tal.

Lad videre U være saaledes beskaffen, at der altid kan findes en fra nul forskjellig positiv størrelse m , slig at mod U ikke vil falde mellem 0 og m for nogen hele værdier af de variable x .

Endelig vil vi forudsætte, at hvis S er en hvilken-somhelst størrelse, saa kan man altid bestemme slige hele tal y , at

$$S = U(y_1 y_2 \cdots y_n) + s,$$

hvor $\text{mod } s < 1$.

Tilfredsstiller funktionen U de her nævnte betingelser, og er:

$$T = U(x_1 x_2 \cdots x_n),$$

hvor de variable x er hele tal, da vil vi kalde T for et helt tal af formen U .

Sats 1. *Er T et helt tal af formen U , men ikke $\sqrt[p]{T}$, hvor p er et vanligt helt tal > 1 , da er $\sqrt[p]{T}$ heller ingen brøk, hvori tæller og nævner har nysnævnte form.*

Var nemlig $\sqrt[p]{T}$ ikke noget tal af den beskrevne art, saa kunne man sætte

$$\sqrt[p]{T} = t + s,$$

hvor t var et helt tal af formen U , og hvor:

$$0 < \text{mod } s < 1.$$

Efter dette faaes altsaa, naar k er et vanligt vilkaarligt helt positivt tal:

$$\left. \begin{aligned} & [\sqrt[p]{T} - t]^k = \\ & = A_0 + A_1 \sqrt[p]{T} + A_2 \sqrt[p]{T^2} + \cdots + A_{p-1} \sqrt[p]{T^{p-1}} = s^k, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

hvor alle koefficienterne A blir hele tal af formen U .

Var derfor

$$\sqrt[p]{T} = \frac{P}{Q},$$

hvor P og Q var hele tal af formen U , saa fik man af (1):

$$A_0 Q^{p-1} + A_1 P Q^{p-2} + \dots + A_{p-1} P^{p-1} = Q^{p-1} s^k. \quad (2)$$

Da man følgelig kan vælge k saa stor, at modulus til høire side i (2) falder mellem 0 og m , maa saaledes den erholdte ligning være umulig.

Sats 2. *Er T og $\sqrt[p]{T^q}$ begge hele tal af formen U , da har $\sqrt[p]{T^r}$ ogsaa denne form, naar blot r er den største fælles faktor for de to hele tal p og q .*

Var nemlig

$$\sqrt[p]{T^q} = R,$$

og α og β to hele tal for hvilke:

$$\beta q = \alpha p + r,$$

saa fik man:

$$R^\beta = \sqrt[p]{T^{\beta q}} = \sqrt[p]{T^{\alpha p + r}} = T^\alpha \sqrt[p]{T^r}$$

eller

$$\sqrt[p]{T^r} = \frac{R^\beta}{T^\alpha}.$$

Men efter sats (1) er herved vor paastand bevist.

Lad os saa betragte tal af formen:

$$H = x_1 h_1 + x_2 h_2 + \dots + x_n h_n,$$

hvor størrelserne x er vanlige positive eller negative hele tal, og hvor hvert h multipliceret med sig selv eller med et vilkaarligt af de øvrige giver et tal af den her beskrevne form.

Kan et helt tal af formen H ikke blive nul, uden at alle koefficienterne x har denne værdi, saa kan H ikke tilhøre nogen af de ovenfor definerede former U , naar antallet n af koefficienterne x er større end 2.

Vi har nemlig:

Sats 3. *Er $n > 2$, og H er defineret ved ligningen:*

$$H = x_1 h_1 + x_2 h_2 + \cdots + x_n h_n,$$

saa kan koefficienterne x gives saadanne hele værdier, at mod H blir saa liden, man vil.

Er nemlig q modulus til det af tallene h , som har den største modulus, og er talværdien af hvert x mindre end det opgivne tal p , saa blir:

$$\text{mod } H \leq npq.$$

Til hvert tal H svarer der nu i det *Gauss'ske* plan et punkt, og da der findes $(2p+1)^n$ *forskjellige* tal H i hvilke hver koefficient x i talværdi ikke overstiger p , saa faar man herved i det *Gauss'ske* plan $(2p+1)^n$ saadanne *forskjellige* punkter indenfor en cirkel med radius npq .

Har man imidlertid r *forskjellige* punkter indenfor en cirkel med radius R , saa vil der blandt disse, efter en af mig bevist sats*, i hvert fald findes to, hvis afstand er mindre end

$$D \sqrt{\frac{2\pi\sqrt{3}}{3r}} \cdot R,$$

* Se forhandlingerne ved de skandinaviske naturforskeres 14de mode i Kjøbenhavn 1892, pag. 352—353.

hvor r kan vælges saa stor, at D kommer saa nær 1, man vil.

Efter dette vil altsaa i nævnte Gauss'ske plan to af de angjældende punkter faa en afstand, som er mindre end:

$$D \sqrt{\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}} \cdot \frac{npq}{(2p+1)^{\frac{n}{2}}}.$$

Er følgelig $n > 2$, kan p vælges saa stor, at udtrykket blir saa lidet, man vil.

Det samme maa altsaa ogsaa gjælde for modulus til differentsen mellem de til de to punkter svarende tal H .

Er derimod $n = 2$, kan det modsatte godt indtræde.

Vi har nemlig:

Sats 4. *Er α og β defineret ved ligningerne*

og

$$\alpha = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$\beta = s(\cos \psi + i \sin \psi),$$

hvor r og s er to vilkaarlige positive størrelser, medens $\operatorname{tg}(\varphi - \psi) \geq 0$, da vil altid:

$$\operatorname{mod} [a\alpha + b\beta] > \operatorname{mod} [t \sin(\varphi - \psi)],$$

hvor t er den mindste af størrelserne r og s , og hvor a og b er vilkaarlige positive eller negative hele tal, der ikke begge er lig nul.

Lad os saa finde de værdier, man her maa give α og β , naar ikke bare summen men ogsaa produktet af hvilke-somhelst to tal af formen $a\alpha + b\beta$, hvor a og b er hele tal, skal faa samme form, og naar intet tal af nævnte form skal kunne blive nul, uden at baade a og b har denne værdi.

Vi skal altsaa have:

$$\alpha^2 = A\alpha + B\beta \quad (3)$$

$$\beta^2 = C\alpha + D\beta \quad (4)$$

$$\alpha\beta = E\alpha + F\beta, \quad (5)$$

hvor A, B, C, D, E og F er hele tal.

Multipliceres sidste ligning med α eller β , saa faar man ved anvendelse af alle tre ligninger:

$$BC = EF \quad (6)$$

$$F(F - A) = B(D - E). \quad (7)$$

Vil vi her ikke medtage den løsning, som giver hele værdier for baade α og β , saa kan ikke baade B og F være lig nul eller baade C og E være lig nul.

Ligningerne (6) og (7) kan løses ved at sætte

$$B = 0, \quad D = 0 \quad \text{og} \quad F = A \quad (8)$$

og ved at sætte:

$$C = 0, \quad F = 0 \quad \text{og} \quad D = E. \quad (9)$$

Af (8) faaes:

$$\alpha = A \quad \text{og} \quad \beta = \frac{D \pm \sqrt{D^2 + 4AC}}{2} \quad (10)$$

Af (9) faaes:

$$\alpha = \frac{A \pm \sqrt{A^2 + 4BD}}{2} \quad \text{og} \quad \beta = D. \quad (11)$$

(10) og (11) betegner i virkeligheden samme løsning.

I ligning (10) skal A, C og D betegne saadanne hele tal, at $D^2 + 4AC$ ikke bliver noget kvadrattal.

Ligningerne (6) og (7) kan ogsaa løses ved at sætte

$$BC = EF,$$

$$F = A \quad \text{og} \quad E = D.$$

Her blir altsaa:

$$a = ab \pm n \sqrt{am} \quad \beta = nm \pm \sqrt{am}, \quad (12)$$

hvor $abmn$ er vilkaarlige hele tal.

Var ingen af faktorerne i (6) og (7) lig nul, kan man sætte:

$$\frac{F}{B} = \frac{C}{E} = \frac{D - E}{F - A} = \frac{p}{q}, \quad (13)$$

hvor p og q er indbyrdes primtal.

Disse ligninger løses i hele tal ved at sætte:

$$\begin{aligned} A &= pb - qa, & B &= qb, & C &= -pc, \\ D &= pa - qc, & E &= -qc, & F &= pb. \end{aligned}$$

Indsættes disse værdier i (3), (4) og (5) faaes:

$$\alpha = \frac{2pb - qa \pm q \sqrt{a^2 - 4bc}}{2} \quad (14)$$

$$\beta = \frac{pa - 2qc \pm p \sqrt{a^2 - 4bc}}{2}, \quad (15)$$

hvor a , b og c er vilkaarlige hele tal og p og q to vilkaarlige indbyrdes primtal.

De her fundne værdier for α og β vilde ogsaa tilfredsstille (3), (4) og (5), om p og q var to vilkaarlige tal.

Sætter man i (14) og (15) $p = 0$, saa faaes løsning (11), og sættes $q = 0$ i (14) og (15) faaes løsning (10).

Var $a^2 - 4bc$ eller $4bc - a^2$ ikke noget kvadrattal, saa fandtes der ikke to fra nul forskjellige hele tal x og y for hvilke

$$xa = y\beta.$$

I modsat fald blev jo:

$$x(2pb - qa) = y(pa - 2qc) \quad (16)$$

$$xq = yp. \quad (17)$$

Da koefficienterne for x og y i (16) ikke kan være nul, saasom dette vilde medføre, at $a^2 = 4bc$, saa maa:

$$\begin{aligned} & (2pb - qa)p = (pa - 2qc)q \\ \text{eller} & \\ & bp^2 - qap + q^2c = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$$a^2 - 4bc = \left[\frac{2pb - qa}{q} \right]^2.$$

Var $p + q = 0$, eller $p = 1$ og $q = -1$, og $b = c$, da blev α og β rødder i ligningen:

$$z^2 - (a + 2b)z + b(a + 2b) = 0. \quad (19)$$

Er $a^2 - 4bc$ ikke noget kvadrattal, og er det positivt, da kan man naturligvis bestemme saadanne hele tal r og s , at mod $(ra + s\beta)$ blir saa liden, man vil.

Er derimod $a^2 - 4bc$ negativ, da blir det umulig at finde saadanne hele tal r og s , at mod $(ra + s\beta)$ kommer under en vis grændse, naar $rs \geq 0$.

Betegner nemlig φ og ψ de til α og β hørende argumenter, saa blir jo ved negativt $a^2 - 4bc$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\pm q \sqrt{4bc - a^2}}{2pb - qa}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\pm p \sqrt{4bc - a^2}}{pa - 2qc}.$$

Var følgelig $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \psi$, saa blev:

$$\begin{aligned} & (2pb - qa)p = (pa - 2qc)q \\ \text{eller} & \\ & \left[\frac{2pb - qa}{q} \right]^2 = -[4bc - a^2]. \end{aligned}$$

Da dette er umuligt, er efter sats (4) vor paastand herved bevist.

Lad os saa finde de tal p, q, a, b og c , for hvilke man ved enhver opgiven størrelse S altid kan bestemme saadanne hele tal r og s , at:

$$S = ra + s\beta + \gamma, \quad (20)$$

hvor $\text{mod } \gamma < 1$.

Vi skal altsaa have:

$$S = N + Mi = r \left[\frac{2pb - qa \pm qi\sqrt{4bc - a^2}}{2} \right] + \\ + s \left[\frac{pa - 2qc \pm pi\sqrt{4bc - a^2}}{2} \right] + n + mi$$

eller

$$2N - [r(2pb - qa) + s(pa - 2qc)] = 2n \quad (21)$$

$$\frac{2M}{\pm\sqrt{4bc - a^2}} - [rq + sp] = \frac{2m}{\pm\sqrt{4bc - a^2}}, \quad (22)$$

hvor

$$n^2 + m^2 < 1.$$

Sætter man:

$$r(2pb - qa) + s(pa - 2qc) = u \quad (23)$$

$$\text{og} \quad rq + sp = v, \quad (24)$$

saa faaes:

$$2[bp^2 - aqp + cq^2]r = up - v(pa - 2qc) \quad (25)$$

$$2[bp^2 - aqp + cq^2]s = v(2bp - qa) - uq, \quad (26)$$

hvor som før vist $bp^2 - aqp + cq^2 \geq 0$.

Skal r og s ved opgivne værdier af u og v blive hele tal, og a er lige, saa maa u være delelig med 2, naar p og q er indbyrdes primtal.

Var derimod a ulige, saa maatte u og v enten begge være lige eller begge ulige.

I første fald maatte u ved passende valg af r og s kunne blive lig et hvilket som helst lige tal, og v lig et hvilket som helst lige eller ulige tal.

Fandtes der nemlig ingen hele værdier af r og s for hvilke man ved lige a fik:

$$u = x \quad \text{og} \quad v = y,$$

hvor x var et vilkaarlig opgivet lige tal, og y et vilkaarlig opgivet — lige eller ulige — tal, og vi saa satte:

$$2N = x \quad \text{og} \quad \frac{2M}{\sqrt{4bc - a^2}} = y,$$

saa blev for disse værdier af N og M mindst et af tallene n og m ikke mindre end en.

Men var til ex. baade

$$2p - (pa - 2qc), \quad [u = 2, v = 1]$$

og

$$2p - 2(pa - 2qc), \quad [u = 2, v = 2]$$

delelig med $2[bp^2 - aqp + cq^2]$, saa blev $pa - 2qc$ og altsaa ogsaa $2p$ delelig med dette tal.

Paa lignende maade fandt man, at tallet ogsaa maatte gaa op i $2q$, eller da p og q er indbyrdes primtal, ogsaa op i 2.

Ved lige a maatte vi altsaa have:

$$bp^2 - aqp + cq^2 = \pm 1. \quad (27)$$

Tilfredsstillet omvendt tallene p, q, a, b og c ligning (27), saa kunde man ved lige a bestemme saadanne hele tal r og s , at u blev et hvilket som helst lige tal og v et hvilket som helst tal.

Skulle her $n^2 + m^2 < 1$, saa fik man som nødvendig og tilstrækkelig betingelse herfor, at:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4bc - a^2}}{4}\right)^2 < 1$$

eller

$$4bc - a^2 < 12.$$

Her blir altsaa enten

$$4bc - a^2 = 8 \quad (28)$$

eller

$$4bc - a^2 = 4. \quad (29)$$

Er (27) tilfredsstillet, saa kan man finde saadanne tal r og s , at

$$ra + s\beta = h + \frac{k}{2} \sqrt{4bc - a^2}, \quad (30)$$

hvor h og k kunde have vilkaarlig opgivne hele værdier.

Alle tal $ra + s\beta$, som tilfredsstiller ligningerne (27) og (28) eller (29) er altsaa hele tal af en af de før opstillede former U .

Lad os saa se lidt paa det tilfælde, da a er ulige, og u og v altsaa enten begge lige eller begge ulige.

Vi bemærker, at enten a er lige eller ulige, saa maa man altid kunne finde saadanne hele værdier af r og s , at u blir et af tallene: x , $x+1$ og $x+2$, og v et af tallene: y , $y+1$ og $y+2$, hvor x og y er hvilkesomhelst to tal.

Lad os nu forudsætte, at faktoren $2(bp^2 - aqp + cq^2)$ for r og s i (25) og (26) gaar op i tallet: $d_0 p + f_0 (pa - 2qc)$.

Ifølge ovenstaaende maa da nævnte faktor ogsaa gaa op i: $d_1 p - f_1 (pa - 2qc)$, $d_2 p - f_2 (pa - 2qc)$ og op i $d_3 p - f_3 (pa - 2qc)$, hvor hvert f er et af tallene: 1, 2 og 3, d_1 et af tallene: $d_0 + 1$, $d_0 + 2$ og $d_0 + 3$, og d_2 et af tallene: $d_0 + 4$, $d_0 + 5$ og $d_0 + 6$, og endelig d_3 et af tallene: $d_0 + 7$, $d_0 + 8$ og $d_0 + 9$.

Angjældende faktor maa altsaa gaa op i to udtryk:

$$(d_0 + g_1)p - i(pa - 2qc)$$

og

$$(d_0 + g_2)p - i(pa - 2qc),$$

hvor i er et af tallene 1, 2 og 3 og hvert g et af tallene 0, 1, 2, ... 9.

Efter de to ligninger blir altsaa $(g_1 - g_2)p$ delelig med $2(bp^2 - aqp + cq^2)$.

Paa lignende maade finder vi, at nævnte tal ogsaa gaar op i et $(t_1 - t_2)q$, hvor hvert t er et af tallene 0, 1, 2, ... 9.

Man har saaledes, at

$$\text{mod } [bp^2 - aqp + cq^2] \overline{\leq} 4. \quad (31)$$

Skal $n^2 + m^2$ altid kunne gøres mindre end 1, saa maa i hvert fald:

$$\left(\frac{\sqrt{4bc - a^2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 < 1 \quad (32)$$

eller

$$4bc - a^2 \overline{\leq} 11.$$

$4bc - a^2$ kan her kun være et af tallene 3, 7 eller 11.

Var ved ulige a :

$$bp^2 - aqp + cq^2 = \pm 1,$$

saa kunde man ifølge (25) og (26) bestemme saadanne værdier for r og s , at v blev et hvilket som helst tal og u et hvilket som helst lige eller ulige tal, eftersom v var lige eller ulige.

Man kunde da finde saadanne værdier af r og s , at $m^2 + n^2$ blev mindre end 1, naar blot

$$\left(\frac{\sqrt{4bc - a^2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 < 1$$

eller naar:

$$4bc - a^2 \overline{\leq} 11.$$

* * *

Vi bemærker, at de i begyndelsen om de hele tal af formen U anførte sætninger (1) og (2) er beviste uden anvendelse af nogen teori for disse tals opløsning i faktorer.

Vi skal yderligere ved et lignende ræsonnement bevise en sats af samme art som (1).

For simpelheds skyld vil vi nøie os med det trivielle tilfælde, da satsen kun vedrører vanlige hele tal.

Sats 5. *Er x og y to hele tal og ligesaa $\sqrt[n]{xy}$, hvor n er et helt positivt tal, og det desuden er umulig at finde to slige hele tal a og b , at*

$$ax = by, \quad (33)$$

hvor $a < y$ og altsaa ogsaa $b < x$, da maa baade $\sqrt[n]{x}$ og $\sqrt[n]{y}$ være hele tal.

Dette kan bevises, uden benyttelse af sætninger om disse tals opløsning i faktorer, paa følgende maade:

Hjælpesats. *Er p og q to vilkaarlige hele positive tal, da existerer der i hele tal A og B ingen ligning:*

$$Ax^p = By^q, \quad (34)$$

i hvilken $0 < A < y^q$ og hvor altsaa ogsaa: $0 < B < x^p$, naar x og y har de ovenfor omtalte positive hele værdier.

Det er tilstrækkelig at godtgjøre, at existensen af en saadan ligning, i hvilken $p + q > 2$, altid vil medføre en ny af samme sort, hvori summen af eksponenterne er mindre, men større end 1.

Er til ex. q ikke mindre end p , saa sætter vi

$$A = \alpha y + \beta,$$

hvor α er et helt tal, og $0 \leq \beta < y$.

Var $\beta > 0$, fik man:

$$[\beta] x^p = [B y^{q-1} - a x^p] y$$

$$0 < \beta < y.$$

Var derimod $\beta = 0$, blev:

$$[a] x^p = [B] y^{q-1},$$

hvor $0 < a < y^{q-1}$.

Fortsattes paa denne maade kom man følgelig til en ligning

$$ax = by,$$

hvor $0 < a < y$ og $0 < b < x$, hvilket strider mod den antagne betingelse.

Var nu til ex. $\sqrt[n]{y}$ intet helt tal, og vi saa satte:

$$y^{mn+1} = z, \quad (35)$$

hvor m betegner et vilkaarligt helt positivt tal, da blev efter sats (1):

$$\sqrt[n]{z} = y^m \sqrt[n]{y}$$

heller intet helt tal.

I modsat fald fik man jo, om dette tal blev betegnet med t :

$$\sqrt[n]{y} = \frac{t}{y^m}.$$

Da $y > 1$, kan man vælge m saa stor, at z blir saa stor, man vil.

Vi bemærker sluttelig, at $\sqrt[n]{xz}$ ogsaa blir et helt tal.

Lad os saa danne ligningerne:

$$\begin{array}{rcl} P - Qh_1 & = & r_1 \\ 2P - Qh_2 & = & r_2 \\ \text{---} & & \text{---} \\ kP - Qh_k & = & r_k \\ (k+1)P - Qh_{k+1} & = & r_{k+1}, \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} P - Qh_1 & = & r_1 \\ 2P - Qh_2 & = & r_2 \\ \text{---} & & \text{---} \\ kP - Qh_k & = & r_k \\ (k+1)P - Qh_{k+1} & = & r_{k+1}, \end{array}} \right\} (36)$$

hvor

$$P = \sqrt[n]{x^{n-1}} \quad \text{og} \quad Q = \sqrt[n]{z},$$

og hvor alle de positive rester r er mindre end Q og alle størrelser h hele tal, medens det hele tal k er defineret ved at:

$$k < Q < k + 1.$$

Alle resterne r maa være forskjellige.

I modsat fald fik man ved at subtrahere de til to lige-store rester hørende ligninger en relation:

$$c \sqrt[n]{x^{n-1}} = d \sqrt[n]{y^{mn+1}}$$

eller

$$c^n x^{n-1} = d^n y^{mn+1},$$

hvor

$$0 < c^n < y^{mn+1}.$$

Af samme grund kan ingen af resterne $r_1 r_2 \dots r_k$ være lig nul.

Vi skal saa vise, at m kan vælges saa stor, at heller ikke r_{k+1} kan blive lig nul.

Var nemlig $r_{k+1} = 0$, saa blev

$$(k+1)^n P^n = h_{k+1}^n Q^n$$

eller

$$(k+1)^n x^{n-1} = h_{k+1}^n z,$$

hvor

$$k^n < z < (k+1)^n.$$

Satte vi her

$$(k+1)^n = \gamma z + \delta,$$

hvor γ var et helt tal og

$$0 \leq \delta < z,$$

saa blev

$$\delta = 0.$$

Ellers fik man jo:

$$[\delta] x^{n-1} = [h_{k+1}^n - \gamma x^{n-1}] z,$$

hvor

$$0 < \delta < z.$$

Men var $\delta = 0$, saa maatte $(k+1)^n \geq 2z > 2k^n$

eller

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^n > 2.$$

Da k eller m kan vælges saa stor, at denne relation blir umulig, er herved paastanden bevist.

Var nu ingen af resterne r mindre end 1, saa fik man mellem 1 og Q , hvor $Q-1 < k$, hele $k+1$ forskellige rester.

Der maatte altsaa findes to rester, hvis differentis i talværdi var mindre end 1.

Ved at subtrahere de to tilsvarende ligninger fra hinanden fik man altsaa i alle tilfælde to positive eller negative hele tal a og b , for hvilke

$$0 < aP - bQ < 1$$

eller

$$0 < [aP - bQ]^n < 1.$$

Da

$$P^{n-s} Q^s = \sqrt[n]{x^{(n-1)(n-s)}} \cdot \sqrt[n]{y^{(mn+1)s}} = x^{n-s-1} \cdot y^{ms} \cdot \sqrt[n]{(xy)^s},$$

saa blir altsaa $(aP - bQ)^n$ lig et mellem 0 og 1 beliggende helt tal.

Men da dette er meningsløst, og ingen af resterne r af samme grund kan være mindre end 1, saa maa $\sqrt[n]{y}$ og altsaa ogsaa $\sqrt[n]{x}$ være et helt tal.

Ligger $\sqrt[n]{x}$ eller $\sqrt[n]{y}$ til ex. $\sqrt[n]{y}$ mellem to paa hinanden følgende hele tal $2k-1$ og $2k$, af hvilke det største er lige, saa kan beviset for sats (5) føres lettere paa anden maade.

Lad os saa til slutning give et eksempel paa hvorledes ovenstaaende ræsonnement ogsaa vil kunne anvendes paa andre størrelser end de vanlige hele tal.

Er x en rod i funktionen $z^2 + z + 1$, saa vil sum, differents og produkt af to tal af formen:

$$a + bx, \quad (38)$$

hvor a og b er vanlige positive eller negative hele tal, ogsaa faa denne form.

Da $\text{mod}(a + bx) = +\sqrt{a^2 - ab + b^2}$, saa kan denne størrelse ved hele værdier af a og b aldrig falde mellem 0 og 1.

Er α og β to vilkaarlige størrelser, saa kan man altid finde slige hele reelle tal p og q , at vi faar:

$$a = \beta(p + qx) + \gamma, \quad (39)$$

hvor

$$0 \leq \text{mod } \gamma \leq \frac{1}{2} \sqrt{3} \text{ mod } \beta.$$

Man kan jo finde to hele tal p og q for hvilke:

$$\frac{a}{\beta} = s + tx = p + qx + c + dx = p + qx + \delta,$$

hvor talværdien af de reelle størrelser c og d ikke var større end $\frac{1}{2}$ og altsaa $\text{mod } \delta$ ikke større end $\frac{1}{2} \sqrt{3}$.

Sættes $\delta\beta = \gamma$, saa fik man videre heraf

$$a = \beta(p + qx) + \gamma,$$

hvor

$$\text{mod } \gamma = \text{mod } \delta \cdot \text{mod } \beta \leq \frac{1}{2} \sqrt{3} \text{ mod } \beta *.$$

* Er $U(x_1 \dots x_n)$ saaledes beskaffen, at man ved vilkaarlig givne hele værdier af størrelserne a og b altid kan finde saadanne hele tal c og d , at

Lad nu i et plan være givet to rette linier A og B, som danner vinkler paa $\frac{\pi}{3}$ og $\frac{2\pi}{3}$ med hinanden, og desuden et punkt c, der ikke ligger paa nogen af linierne, men i et af «vinkelrummene» paa 120° .

Ethvert punkt d i planet kan da paa vanlig vis defineres ved dets algebraiske koordinater med hensyn paa den her beskrevne figur, eller, udførligere sagt, ved de stykker a og b, som punktet d og linierne B og A afskærer af de med A og B parallelle linier gennem d, idet da hvert af disse stykker regnes positivt eller negativt, alt eftersom c og d ligger paa samme eller modsatte sider af den af linierne A og B, som afskærer stykket.

Til hvert tal $a + bx$ vil der da i nævnte plan svare et bestemt punkt med koordinaterne a og b og saaledes, at modulus til tallet blir lig det tilsvarende punkts afstand fra origo.

Desuden vil modulus til differentsen mellem hvilke-somhelst to størrelser blive lig afstanden mellem de to tilsvarende punkter.

Er nu u og v to saadanne hele tal af formen (38), at der ikke findes to hele tal α og β af denne form, for hvilke

$$\alpha u = \beta v,$$

naar

$$0 < \text{mod } a < \text{mod } v,$$

$$U(a_1 \dots a_n) \pm U(b_1 \dots b_n) = U(c_1 \dots c_n)$$

$$U(a_1 \dots a_n) \cdot U(b_1 \dots b_n) = U(d_1 \dots d_n),$$

og vi saa sætter $\text{mod } U(x_1 \dots x_n) = N(x_1 \dots x_n)$, da vil man ved vilkaarlig givne hele værdier af størrelserne p og q altid kunne finde saadanne hele tal r, at:

$$N(p_1 \dots p_n) \cdot N(q_1 \dots q_n) = N(r_1 \dots r_n).$$

da kan vi paa samme maade som ovenfor vist ved anvendelse af (39) bevise, at der heller ikke findes to hele tal A og B af nævnte form, slig at man fik:

$$Au^p = Bv^q,$$

hvor p og q var to vilkaarlig opgivne hele positive tal, og hvor

$$0 < \text{mod } A < \text{mod } v^q.$$

Sats 6. *Lad u og v være bestemt ved ligningerne*

$$u = a + \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} b$$

$$v = c + \frac{-1 + \sqrt{-3}}{3} d,$$

hvor a , b , c og d er saadanne hele rationale tal, at:

$$\text{mod } u^2 = a^2 - ab + b^2 = r^n$$

$$\text{mod } v^2 = c^2 - cd + d^2 = s^n,$$

hvor r og s er to positive hele tal og n et helt positivt ulige tal.

Lad endelig u og v være saaledes beskafne, at der ikke findes to tal A og B af samme form som u og v , saaledes at

$$Au = Bv,$$

hvor $\text{mod } A < \text{mod } v$.

Er da

$$uv = T^n,$$

hvor T er et tal af samme form som u og v , da kan man altid finde to saadanne tal P og Q af denne form, at

$$u = (-x)^p P^n \quad \text{og} \quad v = (-x)^q Q^n,$$

hvor p og q er visse hele positive tal og x som før bestemt ved ligningen:

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

For at bevise dette danner vi ligningerne:

$$\left. \begin{aligned} k_1 \sqrt[n]{v^{n-1}} - h_1 u^a \sqrt[n]{u} &= r_1 \\ k_2 \sqrt[n]{v^{n-1}} - h_2 u^a \sqrt[n]{u} &= r_2 \\ \text{---} & \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ k_m \sqrt[n]{v^{n-1}} - h_m u^a \sqrt[n]{u} &= r_m, \end{aligned} \right\} (40)$$

hvor a er et vilkaarligt helt positivt tal og størrelserne h hele tal af formen (38) og størrelserne k alle de hele tal af denne form, hvis modulus er mindre end

$$\text{mod} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} u^a \sqrt[n]{u} \right].$$

Videre er tallene h valgt slig, at modulus til hver rest r ogsaa blir lig eller mindre end

$$\text{mod} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} u^a \sqrt[n]{u} \right].$$

I ovennævnte plan vil da alle de til tallene k svarende punkter danne knudepunkterne i et gitter af ligesidede triangler, hvis sider repræsenterer længdeenheden.

Videre vil alle de nævnte punkter ligge indenfor en cirkel, hvis centrum falder i arigo, og hvis radius er lig

$$\text{mod} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} u^a \sqrt[n]{u} \right].$$

Endelig vil de til resterne r hørende punkter ikke falde udenfor den her nævnte cirkel.

Enten vil nu alle resterne r være forskellige, eller der vil findes mindst to, som er lige store.

For nærmere at kunne udlede følgerne af den første mulighed, vil vi atter benytte os af den tidligere omtalte sats, som jeg meddelte ved det skandinaviske naturforsker-møde 1892 og som kan udtales saaledes:

Lad være givet en plan flade, som er saaledes sammensat af kongruente, ligesidede triangler, at hver flade af denne art paa $n+1$ triangler kan tænkes dannet af en paa n triangler ved udenfor samme at tilføie et nyt triangel, slig at dette faar en fælles side med et af de n triangler.

Anbringer man da paa en saadan flade ligesaa mange punkter, som fladen har triangelhjørner, idet sammenfaldende hjørner regnès som et, da findes der blandt disse punkter mindst et par, hvis afstand ikke er større end triangelnsiden.

Danner ikke de nævnte punkter alle fladens triangelhjørner, saa vil mindst to af punkterne faa en afstand, som er mindre end triangelnsiden.

Var alle resterne r forskellige, maatte der efter denne sats, som baade kan udtales og bevises rent algebraisk, findes to saadanne rester, at modulus til deres differents blev mindre end en størrelse β , som med voxende α gaar mod 1.

Ved saa at subtrahere fra hinanden de to tilsvarende blandt ligningerne (40) fik man to slige hele tal C og D af formen (38), at:

$$0 < \text{mod} [C \sqrt[n]{v^{n-1}} - D \sqrt[n]{u}] < \beta$$

eller

$$0 < \text{mod} [C \sqrt[n]{v^{n-1}} - D \sqrt[n]{u}]^n < \beta^n.$$

Da $[C \sqrt[n]{v^{n-1}} - D \sqrt[n]{u}]^n$ er et helt tal af formen (38), saa ligger modulus til dette tal ikke mellem 1 og $\sqrt[3]{3}$. Er

følgelig a valgt saa stor, at β^n blir mindre end $\sqrt[n]{3}$, saa blir:

$$\text{mod } [C \sqrt[n]{v^{n-1}} - D \sqrt[n]{u}]^n = 1$$

eller

$$[C \sqrt[n]{v^{n-1}} - D \sqrt[n]{u}]^n = (-x)^s$$

eller

$$C \sqrt[n]{v^{n-1}} - D \sqrt[n]{u} = (-x)^{\frac{s}{n}}$$

eller

$$(-x)^{\frac{s}{n}} \sqrt[n]{v} = Cv - DT$$

eller endelig

$$v = (-x)^q [Cv - DT]^n,$$

hvor q er et af tallene 0, 1, 2, 3, 4 eller 5.

Var to af resterne til ex. r_γ og r_δ lige store, saa fik man ved at subtrahere de to tilsvarende ligninger fra hinanden:

$$(k_\gamma - k_\delta) \sqrt[n]{v^{n-1}} = (h_\gamma - h_\delta) u^\alpha \sqrt[n]{u}$$

eller

$$R \sqrt[n]{v^{n-1}} = Qu^\alpha \sqrt[n]{u}, \quad (41)$$

hvor R og Q var to hele tal af formen (38), og hvor

$$\text{mod } R < \sqrt[n]{3} \text{ mod } u^\alpha \sqrt[n]{u}. \quad (42)$$

Afstanden mellem de til k_γ og k_δ svarende punkter kan jo ikke blive større end diameteren i den før nævnte cirkel.

Af (41) faaes

$$R^n v^{n-1} = Q^n u^{an+1}.$$

Sættes heri

$$R^n = hu^{an+1} + k,$$

hvor h og k er hele tal af formen (38) og

$$\text{mod } k < \text{mod } u^{an+1},$$

saa faaes videre:

$$kv^{n-1} = (Q^n - hv^{n-1})u^{an+1}.$$

Her er altsaa $k = 0$, eller

$$R^n = hu^{an+1} \quad (43)$$

eller efter sats (1):

$$hu = \left[\frac{R}{u^a} \right]^n = P^n, \quad (44)$$

hvor P er et helt tal af formen (38).

Af (44) faaes videre:

$$\text{mod } h^2 \cdot \text{mod } u^2 = [\text{mod } P^2]^n$$

eller

$$\text{mod } h^2 = \frac{(\text{mod } P^2)^n}{\text{mod } u^2} = \left[\frac{\text{mod } P^2}{r} \right]^n = S^n,$$

hvor S er et helt positivt tal.

Idet vi nu for kortheds skyld vil benytte os af vanlige satser om hele rationale tal, saa indsees, at $\text{mod } h^2$ ikke kan indeholde nogen primfaktor, som er større end 2.

I modsat fald blev jo:

$$\text{mod } h^2 \supseteq 3^n,$$

hvilket indsat i (42) og (43) giver:

$$3^n [\text{mod } u^2]^{an+1} \leq [\text{mod } R^2]^n < 3^n [\text{mod } u^2]^{an+1}.$$

Var $\text{mod } h^2$ lig en potens af 2, saa fik man, da n var ulige:

$$\text{mod } h^2 \supseteq 4^n.$$

Efter dette er følgende

$$\text{mod } h = 1$$
 eller

$$h = (-x)^t,$$
 som indsat i (44) giver

$$u = (-x)^{pP^n},$$
 hvor p er et af tallene 0, 1, 2, 3, 4 eller 5.

VII.

Om en rotationsformig netflade med ensartede sexsidede masker.

1. Vi vil begynde med at betragte et af vindskjæve sexkanter sammensat net, hvori hver maske har to parallelle og ligestore sider af længde b , og hvori de fire øvrige sider ogsaa er ligestore og har længden a . Hver maske skal desuden have et paa begge siderne b lodret symmetriplan.

I nettet skal videre to masker med et fælles hjørne ogsaa have en fælles side, hvis ene endepunkt er nævnte hjørne. Ligeledes skal i nettet hvert maskehjørne kun tilhøre en, to eller tre sexkanter.

Endelig skal i nettet tre maskesider fra samme hjørne tilhørende tre i de tre sider sammenstødende masker, altid ligge i samme plan.

Er en maske i nettet opgivet, saa kan heraf alle nettets øvrige masker successive opkonstrueres.

Som man strax ser, vil de til samtlige masker hørende symmetriplaner skjære hverandre i samme rette Linie L , som vil danne axen for den rotationsflade, hvortil nettet mere og mere vil slutte sig, om maskerne eller a og b med bibehold af deres forhold gøres mindre og mindre.

I det her definerede net kan man i hver maskeside tænke sig indlagt to ligestore og modsat rettede kræfter med sine angrebepunkter i hvert sit af sidens endepunkter og saaledes, at tre slige kræfter med fælles angrebepunkt i samme hjørne og faldende efter tre i hjørnet sammenstødende maskesider vil overalt holde hverandre i ligevægt.

Nettet skal med andre ord kunne betragtes som en udspændt traadfigur, der er i ligevægt.

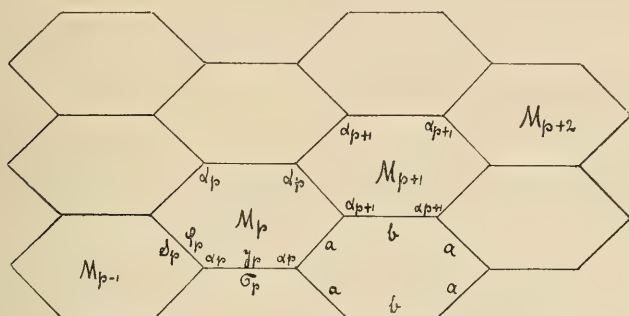


Fig. 1.

I hver maske vil de fire vinkler, som siderne med længden b danner med de tilstødende øvrige sider i masken, være lige store.

Lad nu

$$\dots S_m, S_{m+1}, S_{m+2} \dots$$

være en saadan række efter hinanden følgende maskesider, at S_p og S_{p+1} for hvert helt p blir to modstaaende sider af længden a i en maske, som vi vil betegne med M_p .

Lad videre α_p betegne størrelsen af de fire ligestore vinkler, som siderne b i masken M_p danner med de tilstødende fire andre sider i masken, og lad φ_p betegne vinkelen mellem S_p og axen L og s_p størrelsen af de to lige-

store og i S_p indlagte kræfter. s_p skal med andre ord betegne spændingen i S_p , naar nettet udspændes.

Lad endelig σ_p betegne spændingen i den til masken M_p hørende side b , som støder sammen med S_p , og lad y_p betegne afstanden mellem axen L og den til σ_p hørende side T_p .

Nedprojeceres paa axen L de tre kræfter, hvis fælles angrebspunkt falder i det fælles endepunkt for S_{p+1} og T_{p+1} , saa faaes for hvert helt p :

$$\begin{aligned} s_p \cos \varphi_p &= s_{p+1} \cos \varphi_{p+1} \\ s_p \cos \varphi_p &= h, \end{aligned} \quad (1)$$

hvor h er konstant.

Nedprojeceres derimod de samme tre kræfter paa en paa T_{p+1} lodret linie i kræfternes plan, saa faaes:

$$s_p \sin \alpha_{p-1} = s_{p+1} \sin \alpha_{p+1}$$

Heraf faaes successive:

$$s_2 \sin \alpha_1 = s_3 \sin \alpha_3$$

$$s_3 \sin \alpha_2 = s_4 \sin \alpha_4$$

$$\text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---}$$

$$s_n \sin \alpha_{n-1} = s_{n+1} \sin \alpha_{n+1}$$

eller, om ligningerne multipliceres med hverandre:

$$s_2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 = s_{n+1} \sin \alpha_n \sin \alpha_{n+1}$$

eller

$$s_p \sin \alpha_{p-1} \sin \alpha_p = k, \quad (2)$$

hvor k er konstant og uafhængig af p .

Af (1) og (2) fremgaar altsaa følgende *theorem*:

$$\frac{\sin \alpha_{p-1} \sin \alpha_p}{\cos \varphi_p} = r, \quad (3)$$

hvor r er en vis konstant.

Som man strax ser, vil hver maske i nettet være kongruent med en tilsvarende blandt maskerne M og med denne danne en figur som har et symmetriplan gennem axen L .

Er i nettet en række masker

$$\dots N_m, N_{m+1}, N_{m+2} \dots$$

saaledes beliggende, at N_p og N_{p+1} for hvert helt p faar en fælles side af længde b , da vil alle disse masker faa et og samme symmetriplan gennem L .

Er γ vinkelen mellem de to symmetriplaner for to sammenstødende maskerækker af sidstnævnte art, saa faaes:

$$y_p \sin \gamma = (1 + \cos \gamma) \frac{b}{2} - a \cos \gamma \cos \alpha_{p-1}. \quad (4)$$

Er β_p vinkelen mellem axen L og det plan, som kan lægges gennem T_p og de i sammes endepunkter sammenstødende maskesider, saa blir:

$$\cos \varphi_p = \cos \beta_p \sin \alpha_p. \quad (5)$$

Af (3) og (5) faaes:

$$\frac{\sin \alpha_{p-1}}{\cos \beta_p} = r. \quad (6)$$

Vi skal saa bestemme den relation, som bestaar mellem hovedkrumningsradierne for den rotationsflade, hvortil nettet mere og mere vil slutte sig, om man med bibehold af $\frac{a}{b}$ lader a og b nærme sig nul.

Lad x, y være koordinaterne for det løbende punkt P paa skjæringslinien mellem rotationsfladen og et plan gennem axen L i et i planet beliggende retvinklet koordinat-system, som har axen L til X -axe.

Lad videre R_1 være nævnte kurves krumningsradius i punktet xy og R_2 rotationsfladens anden hovedkrumningsradius i dette punkt.

Her blir da, som bekendt:

$$R_2 = y \sqrt{1 + (y')^2}. \quad (7)$$

Til bestemmelse af R_1 har man af (6) og (4), idet α_{p-1} , β_p og y_p henholdsvis ombyttes med α , β og y :

$$r^2 = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \beta} = [1 - \cos^2 \alpha] [1 + \operatorname{tg}^2 \beta]$$

eller

$$\left[1 - \left(\frac{b}{a} - \frac{\sin \gamma}{a} y \right)^2 \right] [1 + (y')^2] = r^2$$

eller

$$[A + By + Cy^2] [1 + (y')^2] = r^2, \quad (8)$$

hvor

$$A = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

$$B = 2 \sin \gamma \frac{b}{a^2}$$

$$C = -\frac{\sin^2 \gamma}{a^2}.$$

Videre blir:

$$\begin{aligned} A + By + Cy^2 &= \\ &= \frac{-1}{4a^2} [2y \sin \gamma - 2b - 2a] [2y \sin \gamma - 2b + 2a]. \end{aligned}$$

Af (8) faaes:

$$1 + (y')^2 = \frac{r^2}{A + By + Cy^2}$$

eller

$$y'' = -\frac{r^2 (B + 2Cy)}{2(A + By + Cy^2)^2}$$

eller

$$R_1 = \frac{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{\left[\frac{r^2}{A + By + Cy^2} \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{r^2(B + 2Cy)}{2(A + By + Cy^2)^2}}$$

eller

$$R_1 = \frac{-2r\sqrt{A + By + Cy^2}}{B + 2Cy}. \quad (9)$$

Samtidig er

$$R_2 = y \frac{r}{\sqrt{A + By + Cy^2}}. \quad (10)$$

Af (9) og (10) erholdes

$$R_1 R_2 = \frac{2r^2 y}{B + 2Cy}. \quad (11)$$

Var altsaa

$$B = 0$$

eller

$$b = 0,$$

saa fik man en rotationsflade af konstant krumning.

Elimineres y mellem (10) og (11) faaes sammenhængen mellem R_1 og R_2 .

Tilslut bemærkes, at:

$$\sigma_p = -s_{p-1} \cos \alpha_{p-2} - s_p \cos \alpha_p. \quad (12)$$

Ved uendelig smaa masker blir altsaa efter (2) og (12):

$$\sigma = -2s \cos \alpha$$

$$k = s \sin^2 \alpha$$

eller

$$\sigma^2 = 4s(s - k). \quad (13)$$

2. Vi skal saa betragte et nyt af vindskjæve sexkanter sammensat net, som kan erholdes ved en bøjningsdeformation af det ovenfor behandlede.

I hver maske af dette net skal de to modstaaende sidekanter af længde b ligge i samme plan. Videre skal masken have et paa dette plan lodret symmetriplan, som gaar gennem de to modstaaende maskehjørner, der ikke

danner noget endepunkt for nogen af de to nævnte sider med længden b . Endelig skal i hver maske hver side af længde b og de to ved sammens endepunkter tilstødende sidekanter af længde a ligge i samme plan.

Men skal i nettet tre sidekanter med et fælles endepunkt altid ligge i samme plan, saa er herved nettet utvetydig bestemt.

Er en maske opgivet, saa vil heraf alle de øvrige successive kunne konstrueres.

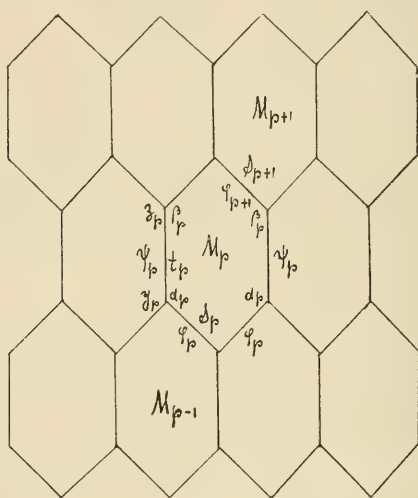


Fig. 2.

Som man strax ser, vil alle maskernes symmetriplaner skjære hverandre i samme rette linie L , som vil danne axen for den rotationsflade, hvortil nettet mere og mere vilde slutte sig, om maskerne paa passende vis gjordes mindre og mindre.

Har to masker en fælles side af længde b , saa blir de to masker kongruente og danner en figur, som har planet gennem L og nævnte side til symmetriplan.

Lad nu i nettet

$$\dots S_m, S_{m+1}, S_{m+2}, \dots$$

betegne en saadan række sidekanter af længde a , at S_p og S_{p+1} for hvert helt p blir modstaaende sidekanter i en og samme maske, som vi vil betegne med M_p .

Lad videre φ_p og ψ_p betegne vinklerne mellem axen L og henholdsvis S_p og hver af siderne b i M_p .

Lad desuden α_p og β_p betegne de vinkler, som S_p og S_{p+1} i M_p henholdsvis danner med hver sin tilstødende side af længde b , og lad y_n og z_n henholdsvis betegne afstandene mellem L og de nævnte to vinklers toppunkter.

Vi bemærker, at hver maske i nettet blir kongruent med en af maskerne M og vil med samme danne en figur, som har et gennem L gaaende symmetriplan.

I lighed med det ovenfor behandlede net vil ogsaa dette kunne opfattes som en udspændt traadfigur.

Spændingen i S_p vil vi betegne med s_p og spændingen i de to maskesider i M_p , som har længden b , med t_p .

Tilslut bemærker vi, at vinkelen 2δ mellem de to planer, som kan lægges gennem axen L og de to modstaaende sidekanter af længden b i en maske, er konstant uafhængig af den valgte maske.

Man ser jo strax, at halvdelen δ af denne vinkel er den samme for hvilket som helst to masker, som har en fælles sidekant af længden a .

Vi faar nu:

$$s_p \cos \varphi_p = k \tag{14}$$

$$t_p \cos \psi_p = h, \tag{15}$$

hvor k og h er to konstanter.

Videre blir:

$$t_p = -2s_p \cos \alpha_p \quad (16)$$

$$t_p = -2s_{p+1} \cos \beta_p. \quad (17)$$

Af (14), (16) og (17) faaes

$$1 = \frac{s_p \cos \alpha_p}{s_{p+1} \cos \beta_p} = \frac{\cos \varphi_{p+1} \cos \alpha_p}{\cos \varphi_p \cos \beta_p}$$

eller

$$\cos \varphi_p \cos \beta_p = \cos \varphi_{p+1} \cos \alpha_p. \quad (18)$$

(18) kan ogsaa udledes af ligningerne:

$$\cos \varphi_{p+1} = -\cos \psi_p \cos \beta_p \quad (19)$$

$$\cos \varphi_p = -\cos \psi_p \cos \alpha_p. \quad (20)$$

Videre faaes med lethed ligningerne:

$$\cos \psi_p \cos \beta_p = \cos \psi_{p+1} \cos \alpha_{p+1} \quad (21)$$

$$y_{p+1} \sin \delta = a \sin \beta_p \quad (22)$$

$$z_p \sin \delta = a \sin \alpha_{p+1} \quad (23)$$

$$z_p - y_p = b \sin \psi_p \quad (24)$$

$$y_{p+1} \cos \delta - z_p = -a \cos \beta_p \sin \psi_p. \quad (25)$$

Multipliseres (25) med $\sin \delta$, saa faaes paa grund af (22) og (23)

$$a \sin \beta_p \cos \delta - a \sin \alpha_{p+1} = -a \cos \beta_p \sin \psi_p \sin \delta$$

eller

$$\sin \alpha_{p+1} = \sin \beta_p \cos \delta + \cos \beta_p \sin \psi_p \sin \delta. \quad (26)$$

Heraf faaes atter

$$[\sin \alpha_{p+1} - \cos \beta_p \sin \psi_p \sin \delta]^2 = \sin^2 \beta_p [1 - \sin^2 \delta]$$

eller

$$\left. \begin{aligned} &[\sin^2 \beta_p + \cos^2 \beta_p \sin^2 \psi_p] \sin^2 \delta - 2 [\sin \alpha_{p+1} \cos \beta_p \sin \psi_p] \sin \delta + \\ &+ [\sin^2 \alpha_{p+1} - \sin^2 \beta_p] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Opløses denne ligning med hensyn paa $\sin \delta$, saa kommer man ved anvendelse af (21) til følgende enkle resultat:

$$\sin \delta = \frac{\sin \alpha_{p+1} \cos \beta_p \sin \psi_p - \sin \beta_p \cos \alpha_{p+1} \sin \psi_{p+1}}{1 - \cos^2 \beta_p \cos^2 \psi_p}. \quad (28)$$

Af (22) og (23) faaes:

$$(z_p - y_p) \sin \delta = a [\sin \alpha_{p+1} - \sin \beta_{p-1}]$$

eller ifølge (24):

$$\sin \psi_p \sin \delta = \frac{a}{b} [\sin \alpha_{p+1} - \sin \beta_{p-1}]. \quad (29)$$

Vi kunde saa nærmere studere den ligning, som fremgik af (28) og (29) ved elimination af $\sin \delta$. Vi vil imidlertid indskrænke os til blot at behandle det tilfælde, da maskerne er uendelig smaa.

Er $\sin \delta$ uendelig liden, saa faar man uendelig tilnærmet af (27):

$$\sin \delta = \frac{\sin^2 \alpha_{p+1} - \sin^2 \beta_p}{2 [\sin \alpha_{p+1} \cos \beta_p \sin \psi_p]}$$

eller

$$\begin{aligned} \sin \delta \sin \psi_p &= \frac{a}{b} [\sin \alpha_{p+1} - \sin \beta_{p-1}] = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha_{p+1} - \sin^2 \beta_p}{2 \sin \alpha_{p+1} \cos \beta_p}. \end{aligned}$$

Sættes

$$\frac{a}{b} = q$$

og

$$\sin \alpha_{p+1} + \sin \beta_p = 2 \sin \alpha_{p+1}$$

saa faaes:

$$q [\sin \alpha_{p+1} - \sin \beta_{p-1}] = \frac{\sin \alpha_{p+1} - \sin \beta_p}{\cos \beta_p}$$

eller

$$\sin \alpha_{p+1} [q \cos \beta_p - 1] = q \cos \beta_p \sin \beta_{p-1} - \sin \beta_p$$

eller

$$\begin{aligned} [1 - \cos^2 \alpha_{p+1}] [q^2 \cos^2 \beta_p - 2q \cos \beta_p + 1] &= \\ &= q^2 \cos^2 \beta_p (1 - \cos^2 \beta_{p-1}) + \\ &+ (1 - \cos^2 \beta_p) - 2q \cos \beta_p \sin \beta_{p-1} \sin \beta_p \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} 2q \cos \beta_p \sin \beta_p \sin \beta_{p-1} &= \cos^2 \alpha_{p+1} [q \cos \beta_p - 1]^2 + \\ &+ \cos \beta_p [2q - \cos \beta_p - q^2 \cos \beta_p \cos^2 \beta_{p-1}] \end{aligned}$$

eller paa grund af (21)

$$\begin{aligned} 4q^2 (1 - \cos^2 \beta_p) (1 - \cos^2 \beta_{p-1}) \cos^4 \psi_{p+1} &= \\ &= [\cos^2 \psi_p \cos \beta_p (q \cos \beta_p - 1)^2 + \\ &+ \cos^2 \psi_{p+1} (2q - \cos \beta_p - q^2 \cos \beta_p \cos^2 \beta_{p-1})]^2. \end{aligned}$$

Sættes her:

$$\begin{aligned} \cos \beta_{p-1} &= u, & \cos \beta_p &= u + du, \\ \cos \psi_p &= v, & \cos \psi_{p+1} &= v + dv, \end{aligned}$$

saa faar man ved at bortkaste uendelig smaa størrelser af høiere end første orden:

$$\begin{aligned} 4q^2 [1 - u^2 - 2u du] [1 - u^2] [v^4 + 4v^3 dv] &= \\ [v^2(u + du) (qu - 1 + q du)^2 + (v^2 + 2v dv) (2q - u - q^2 u^3 - (1 + q^2 u^2) du)]^2 \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} 4q^2 (1 - u^2)^2 v^4 + 4q^2 (1 - u^2) [(1 - u^2) 4v^3 dv - 2u v^4 du] &= \\ = [v^2 (2qu) (qu - 2) du + 2v (2q - u - q^2 u^3) dv + v^2 (2q) (1 - u^2)]^2 \end{aligned}$$

eller

$$4q^2(1-u^2) [4(1-u^2)v^3 dv - 2uv^4 du] = \\ 2v^2(2q)(1-u^2) [v^2(2qu)(qu-2) du + 2v(2q-u-q^2u^3) dv]$$

eller

$$[qu-1]^2 dv = vq[qu-1] du.$$

Var altsaa qu ikke konstant lig 1, saa fik man endelig

$$\frac{dv}{v} = \frac{du}{u-r}, \quad (30)$$

hvor

$$r = \frac{b}{a}.$$

Ved uendelig smaa masker faar man altsaa uendelig tilnærmet:

$$\frac{\cos \psi_{p+1}}{\cos \psi_p} = \frac{\cos \beta_p - r}{\cos \beta_{p-1} - r}$$

eller

$$\cos \psi = d[\cos \beta - r], \quad (31)$$

hvor d er en vis konstant.

Af (22) og (31) kunde man saa udlede rotationsfladens ligning.

Lad nu R_1 betegne krumningsradien for snitkurven mellem rotationsfladen og et plan gennem axen L i det punkt af kurven, som ligger i afstanden y fra L , og lad R_2 betegne rotationsfladens anden hovedkrumningsradius svarende til det nævnte punkt af samme.

Vi faar da:

$$R_2 = \frac{y}{\cos \psi} \\ -R_1 = \frac{b - a \cos \beta}{\operatorname{tg}(\psi_{p+1} - \psi_p)}$$

eller

$$R_2 = \frac{a \sin \beta}{\sin \delta \cos \psi} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} -R_1 &= \frac{b - a \cos \beta}{\cos^2 \psi [\operatorname{tg} \psi_{p+1} - \operatorname{tg} \psi_p]} = \\ &= \frac{(b - a \cos \beta) 2 \operatorname{tg} \psi}{\cos^2 \psi [\operatorname{tg}^2 \psi_{p+1} - \operatorname{tg}^2 \psi_p]} = \frac{(b - a \cos \beta) \sin \psi}{\cos \psi_p - \cos \psi_{p+1}}. \end{aligned}$$

Videre faaes paa grund af (31) og (21):

$$\begin{aligned} -R_1 &= \frac{a}{d} \frac{\cos \psi \sin \psi}{\cos \psi_{p+1} - \cos \psi_p} = \\ &= \frac{a}{d} \frac{\cos \psi \sin \psi \cos \alpha_{p+1}}{\cos \psi_p \cos \beta_p - \cos \psi_p \cos \alpha_{p+1}} \end{aligned}$$

eller

$$-R_1 = \frac{a}{d} \frac{\sin \psi \cos \beta}{\cos \beta_p - \cos \alpha_{p+1}}. \quad (33)$$

Efter det før fundne uendelig tilnærmede udtryk for $\sin \delta$ faaes videre:

$$\begin{aligned} \sin \delta \sin \psi &= \frac{\sin^2 \alpha_{p+1} - \sin^2 \beta_p}{2 \sin \beta \cos \beta} = \\ &= \frac{\cos^2 \beta_p - \cos^2 \alpha_{p+1}}{2 \sin \beta \cos \beta} = \frac{\cos \beta_p - \cos \alpha_{p+1}}{\sin \beta}. \end{aligned}$$

Indsættes dette i (33) faaes:

$$-R_1 = \frac{a}{d \sin \delta} \cdot \frac{\cos \beta}{\sin \beta}. \quad (34)$$

Af (32) og (34) erholder man:

$$R_1 R_2 = - \left[\frac{a^2}{d \sin^2 \delta} \right] \frac{\cos \beta}{\cos \psi} \quad (35)$$

eller

$$R_1 R_2 = - \left[\frac{a}{d \sin \delta} \right]^2 \frac{\cos \beta}{\cos \beta - r}. \quad (36)$$

Var $b = 0$, fik man altsaa en flade af konstant krumning*).

VIII.

Elementært bevis for at ligningen

$$x^4 - 2^n y^4 = 1$$

er uløsbar i hele tal x , y og n , naar $y > 0$.

Er $n = 0$, saa ser man strax, at ligningen er umulig.

Er $n > 0$, maa x være et ulige tal, og man faar:

$$x = 2h + 1$$

$$x^2 = 4h(h + 1) + 1 = 4k + 1$$

$$x^4 = 8k(2k + 1) + 1,$$

hvor k er et helt tal.

Lod ligningen sig løse for $n = 2$, blir

$$8k(2k + 1) = 4y^4$$

eller

$$(2k)(2k + 1) = y^4$$

Men produktet af to paa hinanden følgende hele tal kan ikke være lig nogen fjerde potens.

*) Smlg.: «En pseudomekanisk methode i geometrien» af Axel Thue, Christiania videnskabselskabs forhandlinger 1902. No. 4, pag. 83.

Havde man endelig i hele tal x og y :

$$x^4 - 2y^4 = 1, \quad (1)$$

saa fandtes der et saadant helt tal k , at:

$$8k(2k+1) = 2y^4$$

eller

$$4k(2k+1) = y^4$$

eller, da $4k$ og $2k+1$ er indbyrdes primtal:

$$k = 4z^4 \quad \text{og} \quad 2k+1 = u^4$$

eller

$$u^4 - 8z^4 = 1, \quad (2)$$

hvor u og z er hele tal, og u altsaa ulige.

Der findes følgelig et helt tal r for hvilket man faar:

$$8r(2r+1) = 8z^4$$

eller

$$r(2r+1) = z^4.$$

Da videre r og $(2r+1)$ er indbyrdes primtal, blir:

$$r = a^4 \quad \text{og} \quad 2r+1 = b^4$$

eller

$$b^4 - 2a^4 = 1, \quad (3)$$

hvor a og b er hele tal, og $a > 0$.

Findes der saaledes en løsning i hele tal x og y af ligningen:

$$x^4 - 2^n y^4 = 1,$$

hvor $y > 0$, og hvor n har en vilkaarlig af værdierne 1 og 3, da findes der altsaa en ny løsning af samme ligning i mindre tal, som begge er større end nul.

Herved er satsen bevist.

At ligningen $x^4 - 8y^4 = 1$ er uløsbar i hele tal x og y , som er større end nul, kan ogsaa indsees paa anden maade: Man faar nemlig i hele tal

$$x = 2k + 1$$

eller

$$x^4 - 1 = 8r(2r + 1) = 8y^4,$$

hvor $r = k(k+1)$. Da r og $2r+1$ ere indbyrdes primtal, blir:

$$r = k(k+1) = z^4$$

eller

$$k = p^4 \quad \text{og} \quad k+1 = q^4$$

eller endelig

$$q^4 - p^4 = (q^2 + p^2)(q^2 - p^2) = 1.$$

Men dette bevis har liden interesse.

Trondhjem 29de september 1902.

Axel Thue.

HØIDEMAALINGER I JOTUNHEIMEN

SOMMEREN 1902

AF

P. A. ØYEN



ALB. CAMMERMEYERS FORLAG

Morten Johansens Bogtrykkeri. — Kristiania 1903.

Høidemaalinger i Jotunheimen sommeren 1902.

Af

P. A. Øyen.

Paa en studiereise, som jeg sommeren 1902 i glaciologisk øiemed foretog i Jotunheimen, udførte jeg ogsaa endel mere systematisk anlagte høidemaalinger, dels for at bestemme endel bræers høide, men dels ogsaa for at undersøge den nøiagtighed, man under forskjellige forhold kan gjøre regning paa at opnaa ved maalinger med et ganske almindeligt aneroidbarometer. Ved disse maalinger er benyttet et mindre lommeaneroid, hvormed jeg i en række af aar i mindre høider over havet har opnaaet noksaa tilfredsstillende resultater (cfr. Nyt Mag. f. Naturvid., B. 37, H. 4, pag. 332). Barometret var af det meteorologiske institut forsynet med vakuometerkorrektion, der ved 760^{mm} viste nul; derfra aftog korrektionen ganske jevnt, indtil den ved 560^{mm} viste sig at være $-\frac{1}{6}$ 6^{mm}.

For at undersøge med hvilken sikkerhed vakuometerkorrektionen kunde anvendes i disse større høider, anstilledes 20., 21. og 22. august nogle maalinger ved Memuruboden i Gjendes høide over havet, da jo denne ved flere tidligere maalinger er nogenlunde nøiagtig bestemt (cfr.

rektangelkarterne «Galdhøpiggen» og «Bygdin» samt Den norske turistforenings aarbog 1874, pag. 131, og *Øyen*: Bidrag til vore bræagnes geografi, pag. 153) til henholdsvis: 1010, 979, 1013 og 975 m. o. h.

Ved beregningen af høidemaalingerne har jeg benyttet formelen

$$H = (N \div n) \left(1 + \frac{2}{1000} (T + t) \right),$$

hvor H betegner høiden over havet i meter, N og n betegner tabelkonstanter (cfr. *Mohn*: Praktisk vejledning til høidemaaling med barometer) svarende til de respektive barometertryk for de to steder, hvis høideforskjel søges; T og t er de to observationssteders lufttemperatur angivet i Celsiusgrader. De smaa høide- og breddekorrektioner er ladet ude af betragtning som ubetydelige i forhold til de feil, aneroidmaalingen ogsaa ellers er beheftet med, saameget mere som det ved beregningen kun er disse smaa korrektioners different, der bliver spørgsmaal om.

Undersøgelsen ved Gjende nær Memuruboden gav følgende resultat, idet beregningerne er henført til de tre meteorologiske stationer Leirdalsøren, Domaas og Tonsaasen, og udført dels direkte uden hensyn til barometerkorrektion (A) eller med hensyn taget til vakuometerkorrektionen (V):

Aug. 20.: 8h 0m p. m.	Leirdalsøren	1099,5 (A)	1058,3 (V)
	Domaas	1079,4	1038,9
	Tonsaasen	1075,9	1039,7
	Middel	1084,9	1045,6
Aug. 21.: 8h 0m p. m.	Leirdalsøren	1097,7 (A)	1059,6 (V)
	Domaas	1074,3	1036,7
	Tonsaasen	1076,9	1039,2
	Middel	1083,0	1045,2

Aug. 22.: 8h 0m a. m.	Leirdalsøren	1095,8 (A)	1059,2 (V)
	Domaas	1063,8	1027,4
	Tonsaasen	1079,0	1042,5
	Middel	1079,5	1043,0

Middel af de tre observationer:	1082,5 (A)	1044,6 (V)
---------------------------------	------------	------------

Sammenlignes disse tal med de tidligere bestemmelser af Gjendes høide, sees det brugte aneroidbarometer at give en for stor værdi af denne; selv den anvendte vakuometerkorrektion er ikke istand til at bringe høideværdien saa lavt. Man kunde saaledes enten antage, at Gjendes høide tidligere var for lavt bestemt, eller at det anvendte aneroid giver for store høider, hvorfor det for dette vil være nødvendigt at indføre en særskilt korrektion, fundet ved sammenligning med en tidligere bestemt høide. Tager man middel af de fire anførte værdier af Gjendes høide, faar man 994,3 m. o. h. Dette svarer ogsaa meget nær til middel af de to rektangelkarters angivelse 994,5 m. o. h. Gaar man saa ud fra denne som den sandsynlig rigtige værdi for nævnte steds høide over havet, saa sees, at høider med hensyn taget til vakuometerkorrektionen i Gjendes niveauflade maa fratrækkes 50 m. for at levere den rigtige, og direkte bestemte høider maa fratrækkes 88 m. Dette tal, 88, kan derfor indføres som en negativ korrektion for det anvendte barometer i nævnte niveauflade.

Nogle andre observationer ved Gjende, nemlig ved Memuruboden 21. august og ved Gjendeboden 22. og 23. august, er imidlertid udført til tider, der ikke falder sammen med observationstiderne paa de meteorologiske stationer, hvorfor de heller ikke kan tillægges den grad af nøiagtighed:

Aug. 21.: 6h 0m a. m.	Leirdalsoren	1088,8 (A)
	Domaas	1071,7
	Tonsaasen	1079,9
	Middel	1080,1
Aug. 22.: 9h 0m p. m.	Leirdalsoren	1063,1 (A)
	Domaas	1058,9
	Tonsaasen	1059,7
	Middel	1060,6
Aug. 23.: (interpolation) 6h 0m a. m. 9h 0m a. m.	Leirdalsoren	1061,7 (A)
	Domaas	1064,1
	Tonsaasen	1082,9
	Middel	1069,6

Anvendes i disse tilfælde den ovenfor fundne korrektion, faar man for Gjendes h. o. h. 992, 973 og 982 m.

Ved Juvvashytten anstilledes et par observationer for ligeledes at undersøge forholdet mellem vakuometerkorrektionen og instrumentets virkelige korrektion; de beregnede høider gav som resultat:

Aug. 27.: 8h 0m p. m.	Leirdalsoren	1947,1 (A)	1878,5 (V)
	Domaas	1949,8	1881,9
	Tonsaasen	1953,3	1885,6
	Middel	1950,1	1882,0
Aug. 28.: 8h 0m a. m.	Leirdalsoren	1965,3 (A)	1898,0 (V)
	Domaas	1976,9	1910,0
	Tonsaasen	1970,4	1903,7
	Middel	1970,9	1903,9

Efter rektangelkartet «Galdhopiggen» skulde Juvvandet have en h. o. h. af 1914,5 m. Dette vil vistnok for Juvvashytten sige ca. 1920 m. Ved en tidligere anledning meddelte jeg resultatet af nogle bestemmelser af dette steds høide, som imidlertid gav en betydelig mindre værdi, som

middel 1853 meter (Bidrag til vore brægnenes geografi, pag. 151). Hvilken nøiagtighed man kan tillægge de her meddelte høidetaler, er ikke paa forhaand let at sige. Imidlertid vil maaske den følgende undersøgelse bidrage til at klarne forholdet. Og til at begynde med skal meddeles resultatet af en observation paa Glitretind.

Glitretind besteges 17. august under veirforhold, som i betragtning af disse høider ikke var særlig ugunstige for høidemaaling, men heller ikke med den svage nordvestlige vind og den drivende taage særlig gunstige. Jeg skal ikke ved denne anledning nærmere berøre den diskussion, der i den sidste tid har været ført angaaende de foranderlige forhold med hensyn til Glitretindens høide, men kun minde derom for at erindre, at man her ikke netop befinder sig ligeoverfor en absolut konstant niveauflade, hvilket er af betydning for bedømmelsen af det vundne resultat:

Aug. 17.: 2h 30 ^m p. m.	Leirdalsøren	2657,9 (A)	2562,6 (V)
	Domaas	2634,8	2540,3
	Tonsaasen	2664,8	2569,2
	Middel	2652,5	2557,4

Efter rektangelkartet «Galdhøpiggen» er Glitretindens høide bestemt til 8140 fod, eller 2553,5 meter. Lægges denne høide til grund som den rigtige, faar man en instrumental-korrektion af $\div 99$ m. Og ved at beregne høiden med hensyn taget til vakuometerkorrektionen faar man en korrektion af $\div 4$ m. Denne størrelse sees at ligge saa nær den før bestemte høide, at den endog ligger indenfor den grænse, der findes angivet for snedækkets vekst paa Glitretindens top.

22. august roede jeg fra Memuruboden til Leirungsboden og gik derfra videre op Leirungsdalen og ned Svart-

dalen til Gjendeboden. Paa denne tur anstilledes en sammenhængende række høidemaalinge: Memuruboden, Klopen over Leirungselven nedenfor Simlehytten, høiden af veien nord for Svarthammerhytten, sammenløbet af Leirungselven og Steindalsbræelven, Steindalsbræens nedre kant, Leirungsbræens nedre kant, østre Leirungstjern, Gjendeboden. Den direkte, uden hensyn til vakuometerkorrektionen, beregnede høide, betegnes med (A), og den efter rektangelkartet «Bygdin» tidligere bestemte høide med (B). For Gjende er benyttet den ovenfor bestemte. Høiden af sammenløbet for Leirungselven og Steindalsbræelven er fundet ved interpolation af værdierne for høiden nord for Svarthammerhytten og Steindalsbræens nedre kant.

Memuruboden:

8h 0m a. m.	Leirdalsøren	1095,8 (A)	
	Domaas	1063,8	
	Tonsaasen	1079,0	
	Middel	1079,5 (A)	995,0

Leirungselvklop:

10h 30m a. m.	Leirdalsøren	1177,0 (A)	
	Domaas	1145,2	
	Tonsaasen	1147,1	
	Middel	1156,4 (A)	

Nord for Svarthammerhytten:

12h 0m a. m.	Leirdalsøren	1394,3 (A)	
	Domaas	1362,4	
	Tonsaasen	1374,8	
	Middel	1377,2 (A)	

Leirungs- og Steindalselv:

1h 30m p. m.	Middel	1433,1 (A)	
--------------	--------	------------	--

Steindalsbræen:

2 ^h 0 ^m p. m.	Leirdalsøren	1617,0 (A)	
	Domaas	1586,8	
	Tonsaasen	1598,3	
	Middel	1600,7 (A)	1480,0 (B)

Leirungsbræen:

4 ^h 30 ^m p. m.	Leirdalsøren	1523,8 (A)	
	Domaas	1506,8	
	Tonsaasen	1513,0	
	Middel	1514,5 (A)	

Østre Leirungstjern:

6 ^h 0 ^m p. m.	Leirdalsøren	1697,9 (A)	
	Domaas	1682,9	
	Tonsaasen	1686,3	
	Middel	1689,0 (A)	1590,0 (B)

Gjendeboden:

9 ^h 0 ^m p. m.	Leirdalsøren	1063,1 (A)	
	Domaas	1058,9	
	Tonsaasen	1059,7	
	Middel	1060,6 (A)	995,0

Aneroidbarometret viste saaledes om morgenen i Gjendes niveauflade en stedskorrektion af $\div$ 85 m. og om aftenen i samme niveau en tilsvarende korrektion af $\div$ 66 m., altsaa med en forandring af ikke mindre end 19 m. i aneroidens udvisende. Kunde man gaa ud fra at rektangelkartets angivelse for høiden af Steindalsbræen og østre Leirungstjern var rigtige, saa vilde man for disses vedkommende for barometret faa en stedskorrektion af henholdsvis $\div$ 121 m. og $\div$ 99 m. Indføres her i beregningen en midlere korrektion af $\div$ 75 m. for Gjendes niveauflade og $\div$ 100 m. for niveaufladen 1600, saa faar man for de maalte steder følgende sandsynlighedsværdier af høiden:

Kloppen over Leirungselven	1078 m. o. h.
Vei nord for Svarthammerhytten	1290 —»—
Leirungs- og Steindalselv	1344 —» —
Steindalsbræen	1506 —»—
Leirungsbræen	1423 —»—
Østre Leirungstjern	1590 —»—

At Steindalsbræens høide er fundet noget høiere end paa rektangelkartet angivet, maa nærmest søges i, at denne er noget for lav; dette kunde muligens søges i bestemmelsen af snefonhøide foran bræen, naar en saadan var tilstede, men er vel mindre sandsynligt. At forklaringen kan søges i bræens tilbagegang er vistnok udelukket, da de lokale forhold sammenlignet med bræens tilbagegang tyder paa, at niveauforandringen i den sidste tid ikke har været særdeles stor.

Ved Memurubræerne anstilledes endel observationer 21. august:

Østre Memurubræ:

12 ^h 30 ^m p. m.	Leirdalsøren	1677,0 (A)
	Domaas	1650,8
	Tonsaasen	1660,9
	Middel	1662,9 (A)

Østre Memurubræ:

2 ^h 30 ^m p. m.	Leirdalsøren	1681,5 (A)
	Domaas	1649,5
	Tonsaasen	1660,6
	Middel	1663,9 (A)

Vestre Memurubræ:

4 ^h 15 ^m p. m.	Leirdalsøren	1588,6 (A)
	Domaas	1559,2
	Tonsaasen	1568,2
	Middel	1572,0 (A)

Aneroidbarometrets stedskorrektion bestemtes 21. aug. paa Memuruboden $6^h 0^m$ a. m. til $\div 85$ m. og $8^h 0^m$ p. m. til $\div 88$ m. eller altsaa i begge tilfælde størrelser i nær overensstemmelse med den for Gjendes niveauflade allerede i det foregaaende bestemte midlere. Lægges endvidere til grund den for niveaufladen 1600 fundne negative korrektion 100 m. i Leirungsdalen 22. august, faar man følgende sandsynlige høideværdier:

Østre Memurubræ	1564 m. o. h.
Vestre Memurubræ	1473 —»—

20. august gik jeg fra Glitterheim om Blaatjernholet og Rusvand til Memuruboden. Ved ankomsten til Memuruboden bestemtes barometrets stedskorrektion $8^h 0^m$ p. m. til $\div 90$ m. Og ved observation ved Rusvand, hvis høide efter rektangelkartet «Galdhøpiggen» er 1245 m. o. h., fandtes:

Rusvand:

$2^h 30^m$ p. m.	Leirdalsoren	1317,9 (A)
	Domaas	1280,0
	Tonsaasen	1284,7
	Middel	1294,2 (A)

Stedskorrektionen for Rusvands niveauflade bliver efter dette kun $\div 49$ m. Ved at sammenligne denne størrelse med den om aftenen bestemte korrektion paa Memuruboden og med de 22. august i Leirungsdalen bestemte korrektioner, kunde man være fristet til at antage høiden af Rusvand for høit bestemt, men observationer ved Steinbuvand og Veobræen vil forklare forholdet.

Ved Steinbuvand anstilledes iagttagelser 17. august og ved Veobræen 18. og 19. august.

Steinbuvand:

Aug. 17.: 10h 30m a. m.	Leirdalsøren	1612,8 (A)
	Domaas	1591,2
	Tonsaasen	1606,1
	Middel	1603,4 (A)

Ifølge rektangelkartet «Galdhøpiggen» ligger Steinbuvand i en høide af 1615,6 m. o. h. Efter dette skulde instrumentets stedskorrektion endog blive positiv med en værdi af 12 m.

Veobræen:

Aug. 18.: 9h 0m p. m.	Leirdalsøren	1594,0 (A)
	Domaas	1590,8
	Tonsaasen	1598,8
	Middel	1594,5 (A)

Aug. 19.: 3h 30m p. m.	Leirdalsøren	1578,3 (A)
	Domaas	1595,5
	Tonsaasen	1605,8
	Middel	1593,2 (A)

Efter rektangelkartet «Galdhøpiggen» ligger Veobræens nedre kant i en høide af 1552,8 m. o. h. Ifølge middel af ovenstaaende iagttagelser, 1593,9 meter, skulde steds-korrektionen blive $\div$ 41 m.

Desuden anstilledes et par observationer paa det sted, hvor bræelven gennem sætter den ydre, store endemoræne nedenfor Veobræen:

Aug. 18.: 7h 0m p. m.	Leirdalsøren	1578,4 (A)
	Domaas	1569,8
	Tonsaasen	1580,6
	Middel	1576,3 (A)

Aug. 19.: 2h 0m p. m.	Leirdalsøren	1553,5 (A)
	Domaas	1584,3
	Tonsaasen	1593,2
	Middel	1577,0 (A)

Tager man middel af disse observationer og anvender den ovenfor fundne korrektion for Veobraen, faar man som høide af det sted, hvor elven gjennemsætter endemorænen, 1536 m. o. h.

Med den nu vundne erfaring vil observationen ved den nedre ende af Blaåtjernholsbræen kunne benyttes til en meget sandsynlig høidebestemmelse.

Blaåtjernholet:

Aug. 20.: 12h 0m a. m.	Leirdalsøren	1712,0 (A)
	Domaas	1680,7
	Tonsaasen	1684,0
	Middel	1692,2 (A)

Gaar man ud fra den ved Memuruboden bestemte korrektion og samtidig tager med i beregningen den ved Rusvand og Veobraen bestemte, saa faar man for Blaåtjernholet en sandsynlig korrektion af $\div$ 38 meter, hvorefter høiden af denne bræsjø bliver 1654 m. o. h.

Paa den norske turistforenings nye station Glitterheim anstilledes en række observationer:

Aug. 16.: 8h 0m p. m.	Leirdalsøren	1461,5 (A)
	Domaas	1452,0
	Tonsaasen	1445,6
	Middel	1453,0 (A)
Aug. 17.: 8h 0m a. m.	Leirdalsøren	1475,6 (A)
	Domaas	1457,5
	Tonsaasen	1467,9
	Middel	1467,0 (A)

Aug. 17.: 8h 0m p. m.	Leirdalsøren	1513,8 (A)
	Domaas	1492,4
	Tonsaasen	1502,9
	Middel	1503,0 (A)

Aug. 18.: 8h 0m a. m.	Leirdalsøren	1531,8 (A)
	Domaas	1503,1
	Tonsaasen	1524,6
	Middel	1519,8 (A)

Aug. 18.: (interpoleret)	Leirdalsøren	1521,3 (A)
	{ 4h 30m p. m.	Domaas 1505,6
	{ 5h 30m p. m.	Tonsaasen 1522,4
	Middel	1516,4 (A)

Aug. 18.: (interpoleret)	Leirdalsøren	1507,8 (A)
	{ 5h 30m p. m.	Domaas 1502,1
	{ 11h 0m p. m.	Tonsaasen 1511,4
	Middel	1507,1 (A)

Aug. 19.: 8h 0m a. m.	Leirdalsøren	1480,3 (A)
	Domaas	1512,1
	Tonsaasen	1525,6
	Middel	1506,0 (A)

Aug. 19.: 11h 0m a. m.	Leirdalsøren	1476,0 (A)
	Domaas	1506,0
	Tonsaasen	1517,7
	Middel	1499,9 (A)

Aug. 19.: (interpoleret)	Leirdalsøren	1487,2 (A)
	{ 12h 0m a. m.	Domaas 1516,3
	{ 6h 30m p. m.	Tonsaasen 1525,3
	Middel	1509,6 (A)

Aug. 19.: (interpoleret)	Leirdalsoren	1517,4 (A)
{ 6 ^h 30 ^m p. m.	Domaas	1507,0
{ 9 ^h 0 ^m p. m.	Tonsaasen	1518,9
	Middel	1514,4 (A)

Aug. 20.: 8 ^h 0 ^m a. m.	Leirdalsoren	1542,6 (A)
	Domaas	1516,9
	Tonsaasen	1515,8
	Middel	1525,1 (A)

Som middel af disse 11 observationer faar man altsaa for Glitterheim en direkte beregnet høide af 1501,9 meter. Lægges man til grund de for Veobræen og Rusvand fundne stedskorrekationer, saa vil instrumentets stedskorrektion for Glitterheims vedkommende kunne sættes til $\div$ 44 m. Glitterheims sandsynlige høide bliver saaledes 1458 m. o. h.

I Veodalen anstilledes ligeledes en iagttagelse ved Grøn-boden :

Aug. 16.: 5 ^h 0 ^m p. m.	Leirdalsoren	1361,0 (A)
	Domaas	1346,8
	Tonsaasen	1341,6
	Middel	1349,8 (A)

Anvendes her den for Glitterheim fundne stedskorrektion, bliver høiden af Grønboden 1306 m. o. h.

Endvidere anstilledes 16. august observationer ved sammenløbet af Bergenussa og Veoelven 6^h 20^m p. m. og ved sammenløbet af Graasubækken og Veoelven 7^h 30^m p. m. Ved at interpolere disse observationer med de tilsvarende ved Grønboden 5^h 0^m p. m. og Glitterheim 8^h 0^m p. m. fandtes høiden af

Bergenussa ved Veoelven 1368 m. o. h.

Graasubækken ved Veoelven 1404 —»—

Ved en ekskursion fra Glitterheim 18. august anstilledes observationer ved Bergenussa ca. 1000 m. ovenfor Veoelven, ved Bergenusvand og ved Bergenustjern.

Bergenussa :

11 ^h 0 ^m a. m.	Leirdalsøren	1506,2 (A)
	Domaas	1479,4
	Tonsaasen	1502,3
	Middel	1496,0 (A)

Bergenusvand :

12 ^h 0 ^m a. m.	Leirdalsøren	1719,3 (A)
	Domaas	1693,9
	Tonsaasen	1717,1
	Middel	1710,1 (A)

Bergenustjern :

1 ^h 30 ^m p. m.	Leirdalsøren	1765,8 (A)
	Domaas	1743,2
	Tonsaasen	1766,5
	Middel	1758,5 (A)

Lægger man ved beregningen til grund den ved Veobraeen fundne stedskorrektion bliver høiden af

Bergenussa ca. 1000 m. o. Veoelven	1455 m. o. h.
Bergenusvand	1669 —»—
Bergenustjern	1718 —»—

Ved en bestigning af Glitretind fra Glitterheim 17. aug. anstilledes observationer ved Steinbuvand, ved mærkevarden nær Glitterbraeen lige ved opstigningen til selve Glitretind samt ved den nedre ende af Graasubraeen, med kontrolobservationer paa Glitterheim saavel ved op- som nedstigningen og observationer paa toppen af Glitretind. Ved diffe-

rentiel højdeberegning fandtes høiden af Steinbuvand at være 1585 m. o. h. og ved direkte beregning 1603 m. Det ovenfor paapegede, eiendommelige forhold med hensyn til instrumentets stedskorrektion ved Steinbuvand udjævnes saaledes noget, men dog ikke mere end, at det er meget sandsynlig, høiden her tidligere er noget for høit bestemt. Glitterbrævarden bestemtes ved en lignende differentiell beregning til 2293 m. o. h. Kontrolbestemmelsen paa Glitterheim viste om morgenen en stedskorrektion af $\div 9$ m. og om aftenen $\div 45$ m. Denne sidste staar jo meget nær den for Glitterheim bestemte midlere korrektion, medens den førstnævntes nominelle værdi er betydelig mindre. Dette forringer jo til en grad nøiagtigheden af de gjorte højdebestemmelser; men om man indfører i beregningen den korrigerede stedskorrektion, vil man finde, at relativt tiltager korrektionens nominelle værdi i vardens niveauflade med $\frac{2}{3}$ af det beløb som i Steinbuvandets. Af de to observationer netop at udfinde størrelsen af dette beløb er ikke let, men i forhold til usikkerheden ogsaa ellers er det ikke særdeles betydeligt. For Graasubræens vedkommende naar man et sikrere resultat, idet stedskorrektionen om aftenen stod ganske nær den midlere. Graasubræens højde fandtes 1750 m. o. h.

Med den erfaring, der nu er vundet ved iagttagelser her ved Glitretinden, kan ogsaa den indtil videre udsatte betragtning af høiden ved Juvvand fortsættes. Ved at indføre den korrigerede stedskorrektion for rækken Glitterheim til Glitretind vil man for niveauet 1900, Juvvandets, erholde en sandsynlig instrumentkorrektion af $\div 68$ m. Middel af de to direkte beregnede høider for Juvvashytten gav som resultat 1960,5 m. Anvendes her den fundne, sandsynlige

stedskorrektion, faar man høiden 1892,5 m. o. h. Middel af de to observationer paa Juvvashytten beregnet med hensyn taget til vakuometerkorrektionen gav som resultat 1893 m. o. h. Dette er jo en overensstemmelse med den paa anden maade beregnede høide langt nøiagtigere, end man efter forholdene kunde vente. Det bliver imidlertid efter dette sandsynlig, at dette steds høide tidligere er for høit bestemt, og at jeg ved den ovenfor omtalte leilighed ved at angive den til 1853 meter har angivet den noget for lavt. Den nu beregnede høide nærmer sig vistnok med stor sandsynlighed den rigtige værdi og kan med et rundt tal siges at være ca. 1900 meter, et tal, som jeg ogsaa ved en tidligere anledning (Temperaturiagttagelser i Jotunfjeldene sommeren 1892, pag. 248) angav som den sandsynlige middelhøide for Juvvashytten.

23. august gik jeg fra Gjendeboden gennem Vesleaa-dalen forbi Sjugulsvand og videre gennem Mjølkedalen og Skogadalen til Skagadalsbøen. Observationer anstilledes ved:

Gjendeboden:

(interpoleret)	Leirdalsoren	1061,7 (A)
{ 6h 0m a. m.	Domaas	1064,1
	Tonsaasen	1082,9
{ 9h 0m a. m.		
	Middel	1069,6 (A)

Sjugulsvand:

12h 0m a. m.	Leirdalsoren	1580,4 (A)
	Domaas	1581,7
	Tonsaasen	1604,4
	Middel	1588,8 (A)

Øvre tjern, øvre Mjølkedalen:

1h 30m p. m.	Leirdalsoren	1559,4 (A)
	Domaas	1563,2
	Tonsaasen	1586,6
	Middel	1569,7 (A)

Nedre tjern, øvre Mjølkedalen:

2 ^h 0 ^m p. m.	Leirdalsøren	1523,4 (A)
	Domaas	1525,7
	Tonsaasen	1549,2
	Middel	1532,8 (A)

Skogadalsbøen:

9 ^h 0 ^m p. m.	Leirdalsøren	889,5 (A)
	Domaas	886,1
	Tonsaasen	918,3
	Middel	898,0 (A)

Ved øvre Mjølkedalsvand anstilledes paa samme tur en række observationer. Saaledes maalt (23. august) høiden af bandet mod øvre Mjølkedalen to gange: 3^h 0^m p. m. og 5^h 0^m p. m. med fuldstændig overensstemmende resultat beregnet til

Lærdalsøren	1550,6 (A)
Domaas	1553,8
Tonsaasen	1578,3
Middel	1560,9 (A)

Desuden maalt ved samme anledning vandspeilets høide af den øvre afdeling af øvre Mjølkedalsvand 4^h 0^m p. m. maalt saavel ved ned- som opstigningen og fandtes at have en høide 28,2 m. lavere end bandet.

For at erholde et par sammenligningsled til en værd-sættelse af stedskorrektionen vedføies observationer fra morænesøen i Uradalen og fra Leirvand.

Uradalsvand:

Aug. 25.: 8 ^h 0 ^m a. m.	Leirdalsøren	1135,9 (A)
	Domaas	1129,1
	Tonsaasen	1138,9
	Middel	1134,6 (A)

Leirvand:

Aug. 26.: 5 ^h 0 ^m p. m.	Leirdalsøren	1502,6 (A)
	Domaas	1492,3
	Tonsaasen	1497,8
	Middel	1497,6 (A)

Instrumentets stedskorrektion ved Gjendeboden 23. aug. om morgenen var saaledes $\div 76$ m., altsaa noget mindre end den for Gjende bestemte midlere korrektion; aftenen forud var den imidlertid paa samme sted $\div 66$ meter, hvorfor den maa betragtes som stigende i nominel værdi. Sjugulsvand har ifølge rektangelkartet «Bygdin» en højde af 1478 m. o. h. Stedskorrektionen skulde altsaa her blive hele $\div 111$ m. Den følgende undersøgelse vil vise, om dette er en rimelig korrektion.

Uradalsvandet er ifølge tidligere bestemmelse af høiden angivet at have en højde af 1103 m. o. h. (Den norske turistforenings aarbog 1871, pag. 65—66); her skulde altsaa stedskorrektionen være $\div 32$ m.

Leirvand har ifølge rektangelkartet «Galdhøpiggen» en højde af 1502,6 m. o. h. og stedskorrektionen saaledes her en størrelse af 5 m.

Den højde, jeg ved en tidligere anledning angav for Gjende (Bidrag til vore bræagnes geografi, pag. 153) er 20 m. lavere end den sandsynlig rigtige. Anvendes den samme korrektion for den højde, jeg ved samme anledning (l. c., pag. 153) angav for Skogadalsbøen, bliver dennes højde 827 m. o. h. Om aftenen 23. august skulde efter dette stedskorrektionen for Skogadalsbøen blive $\div 71$ m.

Naar man tager hensyn til de i det foregaaende bestemte stedskorrektioner og til den variation, som stedskorrektionen ved denne sidste undersøgelse viser sig at

have været udsat for, er det lidet sandsynlig, at korrek-
tionen ved Sjugulsvand har været $\div$ 111 m. Man kommer
vistnok sandsynligheden langt nærmere, om man lægger
til grund den dagen i forveien indvundne erfaring fra Lei-
rungsdaalen; gaar man saa ud fra den om morgenen be-
stemte stedskorrektion ved Gjende og sætter stedskorrek-
tionen til $\div$ 100 for niveaufladen 1600, vil man for Sjugul-
svandets niveauflade faa stedskorrektionen $\div$ 96 m. og saa-
ledes for samme en høide af 1493 m. o. h.

Ved at gaa ud fra samme grundlag faar man følgende
sandsynlige høider:

Øvre tjern, øvre Mjølkedalen	1475 m. o. h.
Nedre tjern, øvre Mjølkedalen	1439 —»—
Bandet, øvre Mjølkedalsvand	1466 —»—
Øvre del, øvre Mjølkedalsvand	1438 —»—

Paa den norske turistforenings station paa Skogadals-
bøen anstilledes en række observationer:

Aug. 23.: 9h 0m p. m.	Leirdalsøren	889,5 (A)
	Domaas	886,1
	Tonsaasen	918,3
	Middel	898,0 (A)

Aug. 24.: 8h 0m a. m.	Leirdalsøren	892,4 (A)
	Domaas	893,1
	Tonsaasen	917,4
	Middel	901,0 (A)

Aug. 24.: 9h 0m p. m.	Leirdalsøren	889,8 (A)
	Domaas	906,1
	Tonsaasen	910,7
	Middel	902,2 (A)

Aug. 25.: 2 ^h 15 ^m p. m.	Leirdalsoren	908,3 (A)
	Domaas	898,8
	Tonsaasen	907,1
	Middel	904,7 (A)

Aug. 25.: 4 ^h 0 ^m p. m.	Leirdalsoren	914,4 (A)
	Domaas	898,2
	Tonsaasen	906,9
	Middel	906,5 (A)

Aug. 25.: 10 ^h 0 ^m p. m.	Leirdalsoren	902,5 (A)
	Domaas	876,4
	Tonsaasen	886,3
	Middel	888,4 (A)

Aug. 26.: 8 ^h 0 ^m a. m.	Leirdalsoren	909,1 (A)
	Domaas	879,8
	Tonsaasen	888,9
	Middel	892,6 (A)

Middel af disse 7 observationer giver en højde af 899,1 m. Man mangler her midler til at faa en nøiagtig stedskorrektion og maa derfor lade sig nøie med tilnærmede værdier; om man anvender den ovenfor bestemte $\div$ 71 meter, bliver saaledes Skogadalsbøens højde 828 m. o. h.

Et maalested for vandtemperaturen i Skogadøla nær Skogadalsbøen bestemtes 23. aug. 7^h 30^m p. m. til 18,1 m. høiere end Skogadalsbøen, altsaa 846 m. o. h.

24. august foretoges en ekskursion til Maradalsbræen, paa hvilken tur bestemtes høiden af et maalested for vandtemperaturen i Gjertvaselven lige over for Skogadalsbøen, samt høiden af Maradalsbræen og af det sted, hvor bræelven gjennemsætter den ydre store endemoræne foran denne bræ:

Gjertvaselven (maalested):

10 ^h 30 ^m a. m.	Leirdalsøren	897,7 (A)
	Domaas	900,0
	Tonsaasen	921,2
	Middel	906,3 (A)

Maradalsbræen (nedre ende):

6 ^h 0 ^m p. m.	Leirdalsøren	1257,3 (A)
	Domaas	1269,6
	Tonsaasen	1280,0
	Middel	1269,0 (A)

Maradalsbræen (endemorænen):

2 ^h 30 ^m p. m.	Leirdalsøren	1142,2 (A)
	Domaas	1143,7
	Tonsaasen	1160,5
	Middel	1148,8 (A)

Maradalsbræen (endemorænen):

6 ^h 30 ^m p. m.	Leirdalsøren	1134,8 (A)
	Domaas	1148,2
	Tonsaasen	1158,3
	Middel	1147,1 (A)

Observationen ved Gjertvaselven viser en højde af 4 m. over Skogadalsbøen, altsaa 832 m. o. h.

Idet man gaar ud fra den ovenfor bestemte højde af Skogadalsbøen, faar man her 24. august en meget konstant stedskorrektion, og da andre faste sammenligningsled mangler, gjør man vistnok rettest i at benytte denne ogsaa for de tilstødende observationspunkter, idet feilen da neppe vil blive synderlig stor, og man faar da følgende høider:

Maradalsbræens nedre kant 1195 m. o. h.

Maradalsbræens endemoræne 1148 —»—

Om formiddagen 25. august anstilledes observationer ved morænesøen i Uradalen og ved store Uradalsvand med

kontrolbestemmelse ved Skogadalsbøen, hvilken her gav stedskorrektionen $\div 77$ m. Ovenfor fandtes ifølge en tidligere bestemmelse stedskorrektionen for morænesøen i Uradalen $\div 32$ m. Da imidlertid nøiagtigheden af denne bestemmelse ikke kjendes, kommer man maaske ogsaa her sandsynligheden nærmere ved at anvende den nu bestemte korrektion, og høiden af dette sted bliver da 1058 m. o. h.

Store Uradalsvand:

Aug. 25.: 11 ^h 0 ^m a. m.	Leirdalsøen	1414,3 (A)
	Domaas	1406,8
	Tonsaasen	1414,8
	Middel	1412,0 (A)

Anvendes den ovenfor fundne korrektion, faaes høiden af Store Uradalsvand at være 1335 m. o. h.

Om eftermiddagen 25. august anstilledes en observation ved den nedre ende af Gjertvasbræen:

7 ^h 0 ^m p. m.	Leirdalsøen	1365,8 (A)
	Domaas	1348,0
	Tonsaasen	1357,0
	Middel	1356,9 (A)

Ved kontrolbestemmelse paa Skogadalsbøen 4^h 0^m p. m. og 10^h 0^m p. m. fandtes her den midlere stedskorrektion at være $\div 70$ m. Anvendes denne korrektion ved beregningen af Gjertvasbræens høide, findes denne at være 1287 m. o. h.

26. august anstilledes observationer paa Skogadalsbøen, ved et maaested for vandtemperaturen i Stor-Utla oppe i øvre Utladalens flade bund lige ovenfor gjelet mellem Lushaugadn sæter og Muradn sæter, ved Sandelybræen, ved Leirvand, ved Storbræen og paa Slethavn. Og den føl-

gende dag, 27. august, anstilledes observationer paa Slet-
havn, ved sammenløbet af Leira og Illaaen, paa Elvesæter,
ved Leira nær Elvesæter og paa Juvvashytten.

Stor-Utla:

Aug. 26.: 10 ^h 30 ^m a. m.	Leirdalsoren	1024,2 (A)
	Domaas	995,1
	Tonsaasen	1005,0
	Middel	1008,1 (A)

Sandelvbræen:

Aug. 26.: 2 ^h 0 ^m p. m.	Leirdalsoren	1413,2 (A)
	Domaas	1384,2
	Tonsaasen	1394,0
	Middel	1397,1 (A)

Storbræen:

Aug. 26.: 8 ^h 0 ^m p. m.	Leirdalsoren	1296,4 (A)
	Domaas	1292,0
	Tonsaasen	1293,8
	Middel	1294,1 (A)

Slethavn:

Aug. 26.: (interpoleret) } 6 ^h 30 ^m p. m. } 9 ^h 0 ^m p. m.	Leirdalsoren	1266,9 (A)
	Domaas	1260,8
	Tonsaasen	1262,9
	Middel	1263,5 (A)

Slethavn:

Aug. 27.: 8 ^h 0 ^m a. m.	Leirdalsoren	1255,4 (A)
	Domaas	1264,2
	Tonsaasen	1278,7
	Middel	1266,1 (A)

Leira, Illaa:

Aug. 27.: 10 ^h 30 ^m a. m.	Leirdalsoren	1065,1 (A)
	Domaas	1067,9
	Tonsaasen	1076,5
	Middel	1069,8 (A)

Elvesæter:

Aug. 27.: 2 ^h 0 ^m p. m.	Leirdalsøren	714.4 (A)
	Domaas	714,6
	Tonsaasen	719,9
	Middel	716,3 (A)

26. august 8^h 0^m a. m. var instrumentets stedskorrektion paa Skogadalsbøen $\div$ 65 m.

Gaar man ud fra den høide, jeg ved en tidligere anledning (Bidrag til vore brægnes geografi, pag. 153) angav for Slethavn og antager denne i lighed med, hvad der ovenfor blev sluttet med hensyn til Gjendeboden og Skogadalsbøen, at være 20 m. for lav, skulde ifølge dette høiden af Slethavn være 1196 m. Ovenstaaende to beregninger for Slethavn gav som middel 1264,8 m., altsaa efter den tidligere bestemmelse en instrumentkorrektion af $\div$ 69 m.

Gjør man en lignende betragtning gjældende for Elvesæters vedkommende, idet man gaar ud fra den tidligere angivne høide (Bidrag til vore brægnes geografi, pag. 152), skulde man ved den nu beregnede høide faa en instrumentkorrektion af $\div$ 51 m.

For Juvvashyttens vedkommende fandtes i det foregaaende instrumentkorrektionen $\div$ 68 m.

Som man ser, er det i løbet af disse to dage efter forholdene kun ubetydelige beløb, instrumentets stedskorrektion varierer om. Og det bliver saaledes efter dette uforklarligt, hvorledes man ved Leirvand finder en korrektion af $+ 5$ m. Anvender man den sandsynlige korrektion, skulde Leirvandets høide blive 1430 m. o. h.

Ved at gaa ud fra de direkte beregnede høider og anvende den nu fundne variationsrække for instrumentets stedskorrektion faar man følgende høider:

Maalested ved Stor-Utla	933 m. o. h.
Sandelvbræens nedre ende	1330 —»—
Storbræens nedre ende	1225 —»—
Slethavn	1196 —»—
Sammenløbet af Leira og Illaaen	1008 —»—
Elvesæter	665 —»—

Ved en observation 27. august 2^h 0^m p. m. fandtes Leira nær Elvesæter at ligge 24 m. lavere, altsaa 641 m. o. h.

Af observationer paa Slethavn 6^h 30^m p. m. og 9^h 0^m p. m. og ved Storbræen 8^h 0^m p. m. 26. august beregnedes differentshøiden mellem disse to steder, og fandtes Slethavn at ligge 32,3 m. lavere end Storbræen, hvilket er 3 m. mere end ifølge foregaaende beregninger.

Ved den forudgaaende undersøgelse har jeg søgt at vise, at selv aneroidbarometret kan bruges med stor fordel som høidemaaler, naar man kun har faste punkter at gaa ud fra, ja at det er som differentsmaaler, at det først finder sin hovedanvendelse. Naar jeg i saa stor udstrækning, som skeet er, har gaaet ud fra rektangelkarternes angivelser som saadanne, saa er det ikke fordi, at jeg ubetinget anser dem som saadanne, men fordi jeg har troet det rigtigere at stole paa disse end paa et lommeaneroids ofte noget tvilsomme resultater; dog er i endel tilfælde paavist unøjagtighed i de tidligere bestemmelser. Eksemplerne fra Glitretind og fra Juvvashytten kunde friste til blindt at stole paa beregninger af aneroidbarometrets høideangivelser, naar kun disse var grundet paa hensyntagen til en bestemt udført vakuumeterkorrektion; erfaringen fra Gjende viser, at dette ikke gaar an. Og i virkeligheden opnaar man med aneroidbarometret langt sikrere resultater, naar man stadig følger

dets korrektionsveksling, som til sine tider kan foregaa hurtigere, til andre tider igjen mere langsomt. Betydningen af at indføre kontrolbestemmelser, saa ofte dertil er anledning, falder hurtig i øinene. I det hele maa man ved benyttelsen af aneroidbarometret bestandig huske paa, at det er et instrument, der meget let forandrer sin stand, f. eks. ved stød, rystelser o. s. v. samt ved hurtige op- og nedstigninger. Endelig maa man erindre, at det er ved maaling af forholdsvis mindre høidedifferentser, man med dette instrument kan gjøre regning paa de mere sikre og nøiagtige resultater, hvorimod man ved maaling af større høidedifferentser maa vogte sig for at overdrive nøiagtigheden af de opnaaede resultater, endskjønt disse kan være ganske gode, naar de forskjellige nødvendige hensyn er taget saavel ved udførelsen af selve observationerne som ved disses senere beregning.

METEOROLOGISKE IAGTTAGELSER

I JOTUNHEIMEN SOMMEREN 1902

AF

P. A. ØYEN



ALB. CAMMERMEYERS FORLAG

Morten Johansens Bogtrykkeri. — Kristiania 1903.

**Meteorologiske iagttagelser i Jotunheimen
sommeren 1902.**

Af

P. A. Øyen.

Paa en glaciologisk studiereise i Jotunheimen sommeren 1902 anstillede jeg ogsaa en række meteorologiske iagttagelser, der meddeles i det følgende. For ti aar siden anstillede jeg en lignende række observationer, som jeg har redegjort for i «Archiv f. Math. og Naturv.», B. 16. En mere generel bearbejdelse af de indvundne resultater har ikke min tid tilladt mig dennegang at foretage, men muligens vil der senere kunne blive anledning dertil.

Ved H er betegnet stedets høide over havet i meter overensstemmende med de resultater, som jeg har redegjort for i en afhandling: Høidemaalinger i Jotunheimen sommeren 1902. Ved L er angivet luftens temperatur i celsius-grader bestemt med svingetermometer. Vindretningen er betegnet med vr. Ved angivelsen af vindstyrken (vs) har jeg anvendt den syvdelte, ved skydækket (sk) den tidedelte skala. Ved angivelsen af nedbør betegner RR, R, r henholdsvis sterk regn, regn, lidt regn; S og H paa samme maade for sne og hagl. Med TT har jeg betegnet en

meget tæt taage, med T en almindelig og med t taage i de høieste toppe. Slud har jeg betegnet med RS, hvoraf de brugte sammensætninger let forstaaes.

Grønboden (Veodalen).

Aug. 16.: 5h 0m p. m. H. 1306. L. 4,9. vr. vexl. vs. 0—1. sk. 10.

Bergenussa ved Veoelven.

Aug. 16.: 6h 20m p. m. H. 1368. L. 4,1. vr. vexl. vs. 0—1. sk. 10.

Graasubækken ved Veoelven.

Aug. 16.: 7h 30m p. m. H. 1404. L. 3,1. vr. vexl. vs. 0—1. sk. 10.

Glitterheim.

Aug. 16.: 8h 0m p. m. H. 1458. L. 1,6. vr. vexl. vs. 0—1. sk. 7—8.

Glitterheim.

Aug. 17.: 8h 0m a. m. H. 1458. L. 2,5. vr. vexl. vs. 0—1. sk. 3.

Steinbuvand.

Aug. 17.: 10h 30m a. m. H. 1585. L. 3,5. vr. NW. vs. 1. sk. 8.

Glitretind.

Aug. 17.: 2h 30m p. m. H. 2554. L. $\div$ 3,8. vr. NW. vs. 1. sk. 10. T.

Glitterheim.

Aug. 17.: 7h 0m p. m. H. 1458. L. 6,3. vr. W. vs. 2. sk. 7.

Aug. 17.: 8h 0m p. m. H. 1458. L. 3,9. vr. W. vs. 2. sk. 7.

Glitterheim.

Aug. 18.: 8h 0m a. m. H. 1458. L. 7,8. vr. SW. vs. 1—2. sk. 6—7.

Aug. 18.: 9h 0m a. m. H. 1458. L. 7,5. vr. SW. vs. 1—2. sk. 6—7.

Graasubækken nær Veoelven.

Aug. 18.: 10h 30m a. m. H. 1404. L. 7,4. vr. SW. vs. 2—3. sk. 6.

Bergenussa ca. 1000 m. ovenfor Veoelven.

Aug. 18.: 11h 0m a. m. H. 1455. L. 8,8. vr. SW. vs. 0—1. sk. 5.

Bergenusvand.

Aug. 18.: 12h 0m a. m. H. 1669. L. 7,4. vr. S. vs. 1—2. sk. 5.

Bergenustjern.

Aug. 18.: 1h 30m p. m. H. 1718. L. 6,4. vr. S. vs. 1. sk. 7.

Glitterheim.

Aug. 18.: 4h 30m p. m. H. 1458. L. 7,5. vr. SW. vs. 1—2. sk. 10.

Aug. 18.: 5h 30m p. m. H. 1458. L. 6,3. vr. vexl. vs. 0—1. sk. 10. T.

*Veoelvens gjennombrud gjennom ydre endemoræne
ved Veobraæn.*

Aug. 18.: 7h 0m p. m. H. 1536. L. 3,8. vr. vexl. vs. 0—1. sk. 10. T r.

Nedre Kant af Veobraæn.

Aug. 18.: 9h 0m p. m. H. 1553. L. 2,6. vr. E. vs. 0—1. sk. 10. T r.

Glitterheim.

Aug. 19.: 8h 0m a. m. H. 1458. L. 4,6. vr. SW. vs. 1—2. sk. 10. T Rs.

Aug. 19.: 11h 0m a. m. H. 1458. L. 5,9. vr. SW. vs. 2—3. sk. 10. T R.

Aug. 19.: 12h 0m a. m. H. 1458. L. 6,5. vr. SW. vs. 2—3. sk. 10. T.

Veoelven ca. 1500 m. ovenfor Glitterheim.

Aug. 19.: 1h 0m p. m. H. 1458. L. 5,9. vr. SW. vs. 2—3. sk. 10. T r.

*Veoelvens gennembrud gennem ydre endemoræne
ved Veobraæn.*

Aug. 19.: 2h 0m p. m. H. 1536. L. 5,1. vr. E. vs. 1—2. sk. 10. T Rs.

Nedre Kant af Veobraæn.

Aug. 19.: 3h 30m p. m. H. 1553. L. 5,3. vr. W. vs. 1—2. sk. 10. T R.

Aug. 19.: 4h 30m p. m. H. 1553. L. 3,8. vr. W. vs. 1—2. sk. 10. T RR.

Glitterheim.

Aug. 19.: 6h 30m p. m. H. 1458. L. 6,0. vr. S. vs. 2—3. sk. 10. T R.

Aug. 19.: 9h 0m p. m. H. 1458. L. 6,9. vr. S. vs. 1—2. sk. 10. T R.

Glitterheim.

Aug. 20.: 8h 0m a. m. H. 1458. L. 3,8. vr. vexl. vs. 1—2—3. sk. 10.

Nedre kant af Blaåtjernholsbræen.

Aug. 20.: 12h 0m a. m. H. 1654. L. 1,3. vr. NW. vs. 2—3. sk. 4. t.

Rusvand, nær halvøen nordøst for Gloptind.

Aug. 20.: 2h 30m p. m. H. 1245. L. 7,4. vr. N. vs. 2. sk. 2.

Gjende nær Memuruboden.

Aug. 20.: 8h 0m p. m. H. 995. L. 5,8. vr. W. vs. 2. sk. 9.

Gjende nær Memuruboden.

Aug. 21.: 6h 0m a. m. H. 995. L. 5,0. vr. W. vs. 1—2. sk. 9—10. rt.

Nedre kant af østre Memurubræ.

Aug. 21.: 12h 30m p. m. H. 1564. L. 1,3. vr. N. vs. 1. sk. 9—10. rsT.

Aug. 21.: 2h 30m p. m. H. 1564. L. 3,5. vr. N. vs. 1—2. sk. 5.

Nedre kant af vestre Memurubræ.

Aug. 21.: 4h 15m p. m. H. 1473. L. 1,8. vr. NW. vs. 1—2. sk. 9—10.

Gjende nær Memuruboden.

Aug. 21.: 8h 0m p. m. H. 995. L. 2,3. vr. W. vs. 1—2. sk. 0—1.

Gjende nær Memuruboden.

Aug. 22.: 5h 0m a. m. H. 995. L. 1,3. vr. W. vs. 1—2—3. sk. 0—1.

Aug. 22.: 8h 0m a. m. H. 995. L. 5,0. vr. W. vs. 1—2. sk. 0—1.

Ved kloppen over Leirungsaaen.

Aug. 22.: 10h 30m a. m. H. 1078. L. 7,5. vr. N. vs. 1—2. sk. 0—1.

Ved veien nord for Svarthammerhytten i Leirungsdalen.

Aug. 22.: 12h 0m a. m. H. 1290. L. 6,6. vr. vexl. vs. 0—1. sk. 0—1.

Ved sammenløbet af Leirungsdalselven og Steindalsbrævelven.

Aug. 22.: 1h 30m p. m. H. 1344. L. 6,5. vr. W. vs. 1—2. sk. 1.

Nedre kant af Steindalsbræen.

Aug. 22.: 2h 0m p. m. H. 1506. L. 5,8. vr. N. vs. 0—1. sk. 0—1.

Nedre kant af Leirungsbræen.

Aug. 22.: 4h 30m p. m. H. 1423. L. 3,5. vr. S. vs. 1—2. sk. 1.

Østre Leirungstjern.

Aug. 22.: 6h 0m p. m. H. 1590. L. 3,8. vr. W. vs. 0—1. sk. 2.

Gjende nær Gjendeboden.

Aug. 22.: 9h 0m p. m. H. 995. L. 4,4. vr. W. vs. 0—1. sk. 0.

Gjende nær Gjendeboden.

Aug. 23.: 6h 0m a. m. H. 995. L. 3,8. vr. E. vs. 0—1. sk. 0—1.

Aug. 23.: 9h 0m a. m. H. 995. L. 6,3. vr. E. vs. 0—1. sk. 9.

Sjugulsvand.

Aug. 23.: 12h 0m a. m. H. 1493. L. 2,5. vr. vexl. vs. 0—1. sk. 10. T rs.

Øvre Mjølkedalen, øvre tjern.

Aug. 23.: 1h 30m p. m. H. 1475. L. 3,9. vr. SE. vs. 0—1. sk. 10. t.

Øvre Mjølkedalen, nedre tjern.

Aug. 23.: 2h 0m p. m. H. 1439. L. 4,9. vr. SE. vs. 1—2. sk. 10. Rt.

Øvre Mjølkedalsvand, paa bandet.

Aug. 23.: 3h 0m p. m. H. 1466. L. 3,8. vr. SE. vs. 2—3. sk. 10. Rt.

Øvre Mjølkedalsvand, nordligste afdeling.

Aug. 23.: 4h 0m p. m. H. 1438. L. 3,6. vr. SE. vs. 0—1. sk. 10. RT.

Skogadalselven nær Skogadalsbøen.

Aug. 23.: 7h 30m p. m. H. 846. L. 7,1. vr. E. vs. 0—1. sk. 10. RT.

Skogadalsbøen.

Aug. 24.: 6h 0m a. m. H. 828. L. 8,4. vr. W. vs. 0—1. sk. 10. t.

Aug. 24.: 8h 0m a. m. H. 828. L. 8,8. vr. W. vs. 0—1—2. sk. 10. t.

Gjertvasbræelven nær Stor-Utla.

Aug. 24.: 10a 30m a. m. H. 832. L. 7,3. vr. N. vs. 0—1. sk. 10. t r.

Maradalsbræen, elvens gjennombrud gjennom ydre endemoræne.

Aug. 24.: 2h 30m p. m. H. 1148. L. 7,5. vr. W. vs. 0—1. sk. 9—10. t.

Nedre ende af Maradalsbræen.

Aug. 24.: 6h 0m p. m. H. 1195. L. 5,3. vr. W. vs. 0—1—2. sk. 10. rt.

Skogadalsbøen.

Aug. 24.: 9h 0m p. m. H. 828. L. 10,0. vr. N. vs. 0—1. sk. 10. rt.

Skogadalsbøen.

Aug. 25.: 6h 0m a. m. H. 828. L. 8,8. vr. N. vs. 0—1. sk. 10. t.

Morænesøen i Uradalen.

Aug. 25.: 8h 0m a. m. H. 1058. L. 7,8. vr. NW. vs. 0—1. sk. 10. rt.

Store Uradalsvand, omtrent midten af vandet.

Aug. 25.: 11h 0m a. m. H. 1335. L. 6,5. vr. SE. vs. 0—1. sk. 9. t.

Skogadalsbøen.

Aug. 25.: 2h 15m p. m. H. 828. L. 10,0. vr. N. vs. 0—1. sk. 9—10. t.

Aug. 25.: 2h 15m p. m. H. 828. L. 11,3. vr. N. vs. 0—1. sk. 9—10. t.

Aug. 25.: 4h 0m p. m. H. 828. L. 12,9. vr. N. vs. 0—1. sk. 3.

Nedre ende af Gjertvasbræen.

Aug. 25.: 7h 0m p. m. H. 1287. L. 5,9. vr. SW. vs. 0—1. sk. 9—10. t.

Skogadalsbøen.

Aug. 25.: 10^h 0^m p. m. H. 828. L. 7,8. vr. S. vs. 0—1. sk. 10. T.

Skogadalsbøen.

Aug. 26.: 6^h 0^m a. m. H. 828. L. 5,0. vr. S. vs. 1—2. sk. 9—10. Rt.

Aug. 26.: 8^h 0^m a. m. H. 828. L. 5,3. vr. S. vs. 1—2—3. sk. 9. t.

Stor-Utla, mellem Lusahaugadn sæter og Muradn sæter.

Aug. 26.: 10^a 30^m a. m. H. 933. L. 7,9. vr. W. vs. 0—1. sk. 8. t.

Nedre ende af Sandelvbøren.

Aug. 26.: 2^h 0^m p. m. H. 1330. L. 9,1. vr. N. vs. 0—1. sk. 1.

Leirvand.

Aug. 26.: 5^h 0^m p. m. H. 1430. L. 6,3. vr. SW. vs. 0—1—2. sk. 1.

Slethavn.

Aug. 26.: 6^h 30^m p. m. H. 1196. L. 6,3. vr. S. vs. 0—1. sk. 1.

Nedre ende af Storbræen.

Aug. 26. 8^h 0^m p. m. H. 1225. L. 3,8. vr. SW. vs. 0—1. sk. 0—1.

Slethavn.

Aug. 26.: 9^h 0^m p. m. H. 1196. L. 3,8. vr. S. vs. 0—1. sk. 0.

Slethavn.

Aug. 27.: 6^h 0^m a. m. H. 1196. L. 2,0. vr. N. vs. 0—1. sk. 4.

Aug. 27.: 8^h 0^m a. m. H. 1196. L. 2,3. vr. S. vs. 0—1. sk. 4.

Sammenløbet af Leira og Illaaen.

Aug. 27.: 10^h 30^m a. m. H. 1008. L. 8,8. vr. N. vs. 1—2. sk. 7.

Elvesæter.

Aug. 27.: 2^h 0^m p. m. H. 665. L. 14,8. vr. NE. vs. 0—1. sk. 5.

Juvvashytten.

Aug. 27.: 8h 0m p. m. H. 1893. L. 1,5. vr. SW. vs. 0—1—2. sk. 8. r.

Juvvashytten.

Aug. 28.: 6h 0m a. m. H. 1893. L. 0,0. vr. S. vs. 1—3. sk. 10. S R TT.

Aug. 28.: 8h 0m a. m. H. 1893. L. 0,0. vr. S. vs. 1—3. sk. 10. rSTT.

Aug. 28.: 12h 0m a. m. H. 1893. L. 0,4. vr. S. vs. 1—3. sk. 10. rSTT.



Bind XXV. Hefte 1—2.

Indhold.

No. 1.	Ivar Bang: Studier over Nucleoproteider	Side 1—96
» 2.	R. Collett: Om tre for Norges Fauna nye Fiske	» 1—26
» 3.	Axel Thue: Mindre mathematiske Meddelelser. III	» 1—63
» 4.	P. A. Øyen: Hoidemaalinger i Jotunheimen Sommeren 1902	» 1—28
» 5.	P. A. Øyen: Meteorologiske Iagttagelser i Jotunheimen Sommeren 1902	» 1—10

«Archiv for Mathematik og Naturvidenskab» udkommer med 1 Bind (4 Hefter) aarlig.

Subskriptionsprisen er Kr. 8.00 pr. Bind.

Alb. Cammermeyers Forlag.

OCT 16 1903

7026

ARCHIV
FOR
MATHEMATIK OG NATURVIDENSKAB

UDGIVET

AF

AMUND HELLAND G. O. SARS S. TORUP

FEM OG TYVENDE BIND. TREDIE HEFTE



⌈ KRISTIANIA
ALB. CAMMERMEYERS FORLAG

1903

Al Korrespondance og Forsendelser vedrørende «Archiv for Mathematik og Naturvidenskab» bedes adresseret til Professor Dr. TORUP, Universitetets fysiologiske Institut, Christiania.

Pour tout ce qui concerne la rédaction et l'administration des «Archiv for Mathematik og Naturvidenskab» s'adresser à M. SOPHUS TORUP, professeur à la Faculté de Médecine. L'Institut Physiologique de l'Université, Christiania, Norvège.

OCT 16 1903

VON DER BEWEGUNG EINES CONTINUUMS
MIT EINEM RUHEPUNKTE

VON

DR ELISABETH STEPHANSEN



ALB. CAMMERMEYERS FORLAG

Morten Johansens Bogtrykkeri. — Kristiania 1903.

VON DER BEWEGUNG EINES CONTINUUMS MIT EINEM RUHEPUNKTE.

VON

DR. ELISABETH STEPHANSEN.

Aus der von Herrn Prof. *Hilbert* im Wintersemester 1902—1903 gehaltenen Vorlesung über die Mechanik der Continua habe ich die Anregung zu der vorliegenden Arbeit genommen.

Der Bewegungsvorgang eines Continuum's sei durch die *Euler'sche* Form der Gleichungen definiert, also

$$u = \varphi(x, y, z, t)$$

$$v = \psi(x, y, z, t)$$

$$w = \chi(x, y, z, t)$$

wo u, v, w die Geschwindigkeitscomponenten $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ bedeuten.

Setzen wir stationäre Bewegung voraus, müssen, wie bekannt, die Funktionen φ, ψ, χ von t unabhängig sein.

Wir wollen hier den Fall betrachten, wo wir stationäre Bewegung haben, und wo die Funktionen φ, ψ, χ in x, y, z linear sind. Der Bewegungsvorgang sei dann durch die folgenden Gleichungen definiert:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= Ax + By + Cz \\
 \frac{dy}{dt} &= Dx + Ey + Fz \\
 \frac{dz}{dt} &= Gx + Hy + Iz
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

wo die Coefficienten $A, B, C, \dots I$ gegebene constante Gröſsen bedeuten.

Wir denken uns, dass unser Continuum den ganzen Raum erfüllt.

Wenn die Bewegung stationär ist, fallen bekanntlich Stromlinien und Bahncurven zusammen, und ihre Gleichungen erhalten wir, wenn wir das System (1) integrieren.

Es ist wie bekannt von fundamentaler Bedeutung, immer die Ruhepunkte aufzusuchen und die Bewegung des Continuum in der Nähe dieser Punkte zu studieren. Die Ruhepunkte sind die gemeinsamen Lösungen der Gleichungen

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad \chi = 0.$$

In unsrem Falle giebt es also nur einen *einzig*en Ruhepunkt, nämlich der Punkt

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

oder den Anfangspunkt des Coordinatensystems, indem wir voraussetzen, dass:

$$\begin{vmatrix}
 A & B & C \\
 D & E & F \\
 G & H & I
 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Es handelt sich also zunächst darum, wenn wir uns den durch das Gleichungssystem (1) definierten Bewegungsvorgang geometrisch darstellen wollen, dass wir dies System integrieren um die Bahncurven zu finden. Zu dem

Zwecke fragen wir nach den linearen Verbindungen von x, y, z , welche sich nach Differentiation nach t reproduzieren. Es sei

$$x + my + nz$$

eine solche Verbindung. Also haben wir:

$$\frac{d(x + my + nz)}{dt} = Ax + By + Cz + m(Dx + Ey + Fz) + n(Gx + Hy + Iz) = \lambda(x + my + nz).$$

Hieraus ergibt sich:

$$A + mD + nG = \lambda$$

$$B + mE + nH = \lambda m$$

$$C + mF + nI = \lambda n,$$

woraus weiter folgt,

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & D & G \\ B & E - \lambda & H \\ C & F & I - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$\lambda^3 - (A + E + I)\lambda^2 + (AE + AI + EI - BD - CG - FH)\lambda +$$

$$- \begin{vmatrix} A & D & G \\ B & E & H \\ C & F & I \end{vmatrix} = 0. \quad (\lambda)$$

Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Wurzeln dieser Gleichung, dann hat man:

$$m_1 = \frac{BG - H(A - \lambda_1)}{DH - G(E - \lambda_1)}, \quad n_1 = \frac{CD - F(A - \lambda_1)}{FG - D(I - \lambda_1)}$$

$$m_2 = \frac{BG - H(A - \lambda_2)}{DH - G(E - \lambda_2)}, \quad n_2 = \frac{CD - F(A - \lambda_2)}{FG - D(I - \lambda_2)}$$

$$m_3 = \frac{BG - H(A - \lambda_3)}{DH - G(E - \lambda_3)}, \quad n_3 = \frac{CD - F(A - \lambda_3)}{FG - D(I - \lambda_3)}$$

Wir setzen zunächst voraus, dass $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ reel und von einander verschieden sind. Dann sind es auch m_1, m_2, m_3 und n_1, n_2, n_3 .

Wir wollen auf ein schiefwinkliges Coordinatensystem transformieren, indem wir setzen:

$$x + m_1 y + n_1 z = \xi$$

$$x + m_2 y + n_2 z = \eta$$

$$x + m_3 y + n_3 z = \zeta$$

Wir haben dann

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda_1 \xi$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \lambda_2 \eta$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \lambda_3 \zeta$$

woraus wir ziehen:

$$\xi = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \eta = C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \zeta = C_3 e^{\lambda_3 t}.$$

Wenn für $t = 0$,

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c, \quad \text{ist,}$$

und setzen wir:

$$a + m_1 b + n_1 c = \alpha, \quad a + m_2 b + n_2 c = \beta, \quad a + m_3 b + n_3 c = \gamma,$$

so dass also α, β, γ die Anfangscoordinaten eines Theilchens des Continuum in dem neuen, schiefwinkligen Coordinatensystem bedeuten, so haben wir:

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha e^{\lambda_1 t} \\ \eta &= \beta e^{\lambda_2 t} \\ \zeta &= \gamma e^{\lambda_3 t} \end{aligned} \tag{2}$$

Diese sind also die gesuchten Gleichungen der Bahn-curven und zugleich die der Stromlinien. Zu jedem Theilchen des Continuum's oder zu jedem Anfangspunkte (α, β, γ) gehört eine gewisse Stromlinie. Man sieht auch, dass ξ entweder immer positiv oder immer negativ bleibt, je nach dem Vorzeichen von α . Das entsprechende gilt für η und ζ . So lange daher die Wurzeln der Gleichung (λ) reel und verschieden sind, wird die Bahncurve eines Theilchens nie eine der Coordinatenebenen durchschneiden.

Der Ruhepunkt ist der Punkt $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0$.

Man sieht auch, dass, wenn zu Anfang der Bewegung ein Theilchen sich in einer der Coordinatenebenen befindet, seine ganze Bewegung sich in dieser Ebene vollziehen wird. Die neuen Coordinatenebenen können wir daher als Trennungsebenen in Bezug auf die Strömung betrachten.

Wenn wir jetzt den Verlauf der Bahncurven näher untersuchen wollen, müssen wir verschiedene Fälle unterscheiden.

I. Die Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind, wie vorausgesetzt, *reel und von einander verschieden*; aber ausserdem setzen wir voraus, dass sie das *nämliche Vorzeichen* haben.

In der kubischen Gleichung muss also bei positiver Discriminante

$$AE + AI + EI - BD - CG - FH > 0$$

sein, und der Coefficient von λ^2 und das constante Glied müssen das nämliche Vorzeichen haben.

Für die Bahncurven oder Stromlinien hatten wir die Gleichungen

$$\xi = \alpha e^{\lambda_1 t}, \quad \eta = \beta e^{\lambda_2 t}, \quad \zeta = \gamma e^{\lambda_3 t}.$$

Sei λ_1 die dem absoluten Betrage nach *kleinste* der Wurzeln, so können wir setzen

$$\mu = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1 \quad \text{und} \quad \nu = \frac{\lambda_3}{\lambda_1} > 1.$$

Um uns ein deutliches Bild von der Strömung zu verschaffen, wollen wir die Projektionen der Bahncurven in zwei der Coordinatenebenen untersuchen, indem wir parallel der sich in der betreffenden Ebene nicht befindenden Axe projicieren. Wir nehmen hier die Ebene $\xi\eta$ und $\xi\zeta$, und haben dann für die beiden Projektionen die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \eta &= \beta \left(\frac{\xi}{\alpha} \right)^\mu \\ \zeta &= \gamma \left(\frac{\xi}{\alpha} \right)^\nu \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \text{oder} \quad \eta &= C_1 \xi^\mu \\ \zeta &= C_2 \xi^\nu *). \end{aligned}$$

Für $\xi = 0$ ist hier auch $\eta = 0$ und $\zeta = 0$, d. h. die Bahncurven gehen alle durch den Ruhepunkt, und man sieht, dass sie im Nullpunkt alle die ξ -Axe berühren. Weiter sehen wir, dass die Projektionen der Bahncurven in den beiden Coordinatenebenen ähnlichen Verlauf haben.

Aus den Gleichungen (2) geht hervor, dass für die Theilchen, die in einer der Coordinatenebenen liegen, die Bahncurven mit diesen Projektionen zusammenfallen und also ebene Curven sind. Diejenigen Bahncurven, die der $\eta\zeta$ -Ebene angehören, werden einen ähnlichen Verlauf haben wie die Bahncurven in den beiden anderen Coordinatenebenen und werden die η - oder ζ -Axe berühren, je nachdem $|\lambda_2| \lesseqgtr |\lambda_3|$ ist. Die Coordinatenachsen sind auch Strom-

*) Man vergleiche die *W*-Curven von *Klein* und *Lie*.

linien. Wenn wir untersuchen wollen, in welcher Richtung die Strömung verläuft, müssen wir unterscheiden, ob die Wurzeln der Gleichung (λ) alle positiv oder alle negativ sind.

a) Die Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ seien alle positiv.

Für $t = -\infty$, ist $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0$. Für $t = 0$, ist $\xi = a, \eta = \beta, \zeta = \gamma$. Für $t = +\infty$, ist $\xi = \infty, \eta = \infty, \zeta = \infty$.

Mit wachsender Zeit strömt also alles vom Ruhepunkte weg, und zwar mit zunehmender Geschwindigkeit doch so, dass keine Unstetigkeiten auftreten.

b) Die Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ seien alle negativ.

Für $t = -\infty$, ist hier $\xi = \infty, \eta = \infty, \zeta = \infty$. Für $t = +\infty$, ist $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0$.

Mit wachsender Zeit strömt in diesem Falle alles mit abnehmender Geschwindigkeit dem Ruhepunkte zu, der doch erst für $t = \infty$ erreicht wird.

Ein Beispiel von dem Verlauf der Strömung zeigen die umstehenden Figuren, Fig. 1 und Fig. 1' (pag. 11).

II. Wir wollen hier den Fall betrachten, wo *zwei Wurzeln der Gleichung (λ) dasselbe Vorzeichen haben, die dritte Wurzel dagegen entgegengesetztes*.

Bei positiver Discriminante kann hier in der kubischen Gleichung das Vorzeichen der Coefficienten von λ^2, λ und des constanten Gliedes beliebig sein, mit Ausnahme derjenigen beiden Combinationen, wo der Fall I eintritt. Wir wollen jetzt für diesen Fall die Bahncurven aufsuchen.

Setzen wir voraus, dass λ_1 und λ_2 *das nämliche Vorzeichen* haben, also

$$\lambda_1 \lambda_2 > 0 \text{ und } \lambda_3 \geq 0,$$

und dass λ_1 dem absoluten Betrage nach die kleinste der Wurzeln ist, so können wir setzen:

$$\mu = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1, \text{ und } \nu = \frac{\lambda_3}{\lambda_1} < -1 \\ -\nu > 1.$$

Für die Bahncurven, die zugleich Stromlinien sind, hatten wir die Gleichungen:

$$\xi = ae^{\lambda_1 t}, \quad \eta = \beta e^{\lambda_2 t}, \quad \zeta = \gamma e^{\lambda_3 t}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\eta = \beta \left(\frac{\xi}{a} \right)^\mu, \quad \frac{\zeta}{\gamma} \cdot \left(\frac{\xi}{a} \right)^{-\nu} = 1.$$

Die Projektionen der räumlichen Bahncurven auf die Coordinatenebenen sind wie früher zugleich diejenigen Bahncurven, die in diesen Ebenen liegen.

Was die Projektion der Bahncurven in der $\xi\eta$ -Ebene betrifft, so entspricht sie genau der Projektion in derselben Ebene bei dem Falle I.

Untersuchen wir daher die Curven in der Ebene $\xi\zeta$. Für $\xi = 0$ ist nicht $\zeta = 0$, also die Bahncurven gehen hier im allgemeinen nicht durch den Ruhepunkt. Da die Curven in der $\eta\zeta$ -Ebene einen entsprechenden Verlauf wie die in der $\xi\zeta$ -Ebene haben, gehen also im ganzen nur diejenigen Bahncurven, die der $\xi\eta$ -Ebene angehören, so wie die, welche mit den Coordinatenachsen zusammenfallen, durch den Ruhepunkt. Man kann die Gleichung, $\frac{\zeta}{\gamma} \cdot \left(\frac{\xi}{a} \right)^{-\nu} = 1$, auch schreiben:

$$\zeta \cdot \xi^{-\nu} = \text{const.}$$

Dies ist eine verallgemeinerte Hyperbelgleichung, auf die Asymptoten als Coordinatenachsen bezogen.

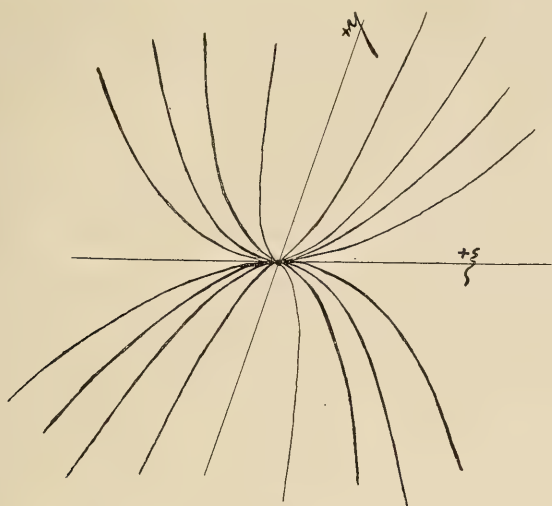


Fig. 1.



Fig. 1'.

$$\lambda_1 > 0; \lambda_2 > 0; \lambda_3 > 0; \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3.$$

Um den Verlauf der Strömung der Richtung nach zu bekommen, müssen wir hier wieder zwei Fälle unterscheiden:

a) Es seien

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \text{ und } \lambda_3 < 0.$$

Für $t = -\infty$, ist $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = \infty$. Für $t = 0$, ist $\xi = \alpha$, $\eta = \beta$, $\zeta = \gamma$. Für $t = +\infty$, ist $\xi = \infty$, $\eta = \infty$, $\zeta = 0$. In der $\xi\eta$ -Ebene strömt also alles mit wachsender Zeit vom Ruhepunkte weg, während in der $\xi\zeta$ -Ebene mit wachsender Zeit alles dem unendlich fernen Punkte der ξ -Axe zuströmt, mit Ausnahme von denjenigen Theilchen, die auf der ζ -Axe liegen, und die dem Nullpunkte zuströmen, den sie doch erst für $t = \infty$ erreichen. Für die ganze Strömung kann man also sagen, dass mit wachsender Zeit alles nach den unendlich fernen Punkten der $\xi\eta$ -Ebene strömt, so dass die Bahncurven im Raume sich dieser Ebene asymptotisch nähern, mit Ausnahme derjenigen Theilchen, die der ζ -Axe angehören, und die dem Ruhepunkte zuströmen.

b) Es seien

$$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \text{ und } \lambda_3 > 0.$$

Für $t = -\infty$, ist hier $\xi = \infty$, $\eta = \infty$, $\zeta = 0$. Für $t = +\infty$, ist $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = \infty$. In der $\xi\eta$ -Ebene wird alles mit wachsender Zeit dem Nullpunkte zuströmen. In der $\xi\zeta$ -Ebene nähert sich alles mit wachsender Zeit dem unendlich fernen Punkt der ζ -Axe mit Ausnahme derjenigen Theilchen, die auf der ξ -Axe liegen, und die dem Nullpunkte zuströmen. Von dem Verlauf der ganzen Strömung kann man also sagen, dass, mit Ausnahme derjenigen Theilchen, die der $\xi\eta$ -Ebene angehören, und die dem Ruhe-

punkte zuströmen, alles mit wachsender Zeit nach dem unendlich fernen Punkte der ξ -Axe strömt, und zwar haben die Raumcurven diese Axe als Asymptote.

Wenn die dem absoluten Betrage nach kleinste Wurzel, also λ_1 , entgegengesetztes Vorzeichen von den beiden anderen Wurzeln haben sollte, so macht dies keinen wesentlichen Unterschied. Die Curven verlaufen ähnlich wie früher, nur spielt jetzt die ξ -Axe dieselbe Rolle wie vorher die ζ -Axe, und dementsprechend die $\eta\zeta$ -Ebene dieselbe Rolle wie oben die $\xi\eta$ -Ebene.



Fig. 2. $\lambda_1 < 0$; $\lambda_2 < 0$; $\lambda_3 > 0$.

Fig. (2) zeigt ein Beispiel von dem Verlauf einer Bahncurve im Raume nebst Bahncurven in den Coordinatenebenen.

III. Nehmen wir an, die Discriminante der kubischen Gleichung (λ) sei negativ. Es werden dann zwei der Wur-

zeln conjugiert imaginär und die dritte reel sein. Wir nehmen an, es sei

$$\lambda_1 = l' + il''$$

$$\lambda_2 = l' - il''$$

und wir setzen voraus, dass l' von Null verschieden ist.

Um die Gleichungen (1) für diesen Fall zu integrieren, bringt man sie wieder auf die Form

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda_1 \xi, \quad \frac{d\eta}{dt} = \lambda_2 \eta, \quad \frac{d\zeta}{dt} = \lambda_3 \zeta,$$

indem wir setzen:

$$\xi = x + m_1 y + n_1 z$$

$$\eta = x + m_2 y + n_2 z$$

$$\zeta = x + m_3 y + n_3 z.$$

Wir erhalten dann wie früher:

$$\xi = a e^{\lambda_1 t}, \quad \eta = \beta e^{\lambda_2 t}, \quad \zeta = \gamma e^{\lambda_3 t}.$$

Da λ_1 und λ_2 conjugiert imaginär sind, sind es auch m_1 und m_2 , n_1 und n_2 , dagegen sind m_3 und n_3 reel. Wir können also setzen:

$$m_1 = m' + im''$$

$$n_1 = n' + in''$$

$$m_2 = m' - im''$$

$$n_2 = n' - in''.$$

Um den Bewegungsvorgang geometrisch deuten zu können, führen wir neue, schiefwinklige Coordinaten ein, indem wir setzen:

$$x + m' y + n' z = x'$$

$$m'' y + n'' z = y'$$

$$x + m_3 y + n_3 z = z'.$$

Sei wie früher für $t = 0$, $x = a$, $y = b$, $z = c$, so haben wir:

$$\alpha = a + m'b + n'c + i(m''b + n''c) = \alpha' + i\beta'$$

$$\beta = a + m'b + n'c - i(m''b + n''c) = \alpha' - i\beta'.$$

Die Integrale unsres gegebenen Systems von Differentialgleichungen werden folglich in diesem Falle lauten:

$$\begin{aligned}x' + iy' &= (\alpha' + i\beta')e^{(l'' + il''')t} \\x' - iy' &= (\alpha' - i\beta')e^{(l'' - il''')t} \\z' &= \gamma e^{\lambda_3 t}.\end{aligned}$$

Aus den beiden ersten Integralen ergeben sich durch Addition und Subtraktion die beiden folgenden:

$$\begin{aligned}x' &= e^{l''t} [\alpha' \cos(l'''t) - \beta' \sin(l'''t)] \\y' &= e^{l''t} [\alpha' \sin(l'''t) + \beta' \cos(l'''t)].\end{aligned}\tag{4}$$

Diese beiden Gleichungen in Verbindung mit der Gleichung

$$z' = \gamma e^{\lambda_3 t}$$

geben uns also die Gleichungen der Bahncurven oder Stromlinien, indem die Coordinaten als Funktionen von t ausgedrückt sind.

Die beiden Gleichungen (4) stellen, ähnlich wie früher, die Projektionen der Bahncurven in der $x'y'$ -Ebene so wie die Bahncurven derjenigen Theilchen, die in dieser Ebene liegen, dar, und diese Projektionen wollen wir zunächst untersuchen. Die Coordinaten x' und y' können alle mögliche Werthe zwischen 0 und $\pm \infty$ annehmen; aber sie nehmen nicht mit wachsender Zeit immer zu oder immer ab, weil der zweite Faktor eine periodische Funktion von t , und zwar von der Periode $\frac{2\pi}{l'''}$, ist. Während der Zeit, wo t um $\frac{2\pi}{l'''}$ gewachsen ist, wird der Punkt (x', y') sich durch alle die vier Winkelräume, worin die Ebene durch die Axen getheilt wird, bewegt haben. Man findet weiter, dass eine logarithmische Spirale durch eine affine Transformation der Ebene sich in eine Curve, wie die durch die Gleich-

ungen (4) darstellte, überführen lässt. Die Projektionen der Bahncurven in der $x'y'$ -Ebene sind folglich Spiralen, die den Nullpunkt als Asymptotenpunkt haben.

Wenn wir uns die Bahncurven im Raume construieren wollen, kommt zu den Gleichungen (4) die Gleichung $z' = \gamma e^{\lambda_3 t}$ hinzu. Die Bahncurven werden also spiralen-ähnliche Raumcurven um die z' -Axe sein, mit Ausnahme der ebenen Bahncurven, die in der $x'y'$ -Ebene liegen, und der z' -Axe selbst, die auch eine Bahncurve oder Stromlinie ist. Die x' -Axe und y' -Axe sind hier keine Stromlinien. Aus dem Ausdruck für z' sieht man, dass die einzelnen Windungen der Raumcurven um so dichter zusammen liegen, je näher man der $x'y'$ -Ebene kommt, und ihr Abstand vergrößert sich, je mehr man sich von dieser Ebene in der Richtung der positiven oder negativen z' -Axe entfernt. In der nächsten Nähe der $x'y'$ -Ebene müssen die einzelnen Windungen unendlich dicht zusammen liegen.

Wir können hier 4 Fälle unterscheiden.

a) Es seien l' und λ_3 beide positiv.

Für $t = -\infty$, ist $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$. Für $t = 0$, ist $x' = \alpha'$, $y' = \beta'$, $z' = \gamma$. Für $t = +\infty$, ist $x' = \infty$, $y' = \infty$, $z' = \infty$.

Der Nullpunkt ist in diesem Falle der Asymptotenpunkt für die Bahncurven.

b) Es seien λ_3 und l' beide negativ.

Für $t = -\infty$, ist $x' = \infty$, $y' = \infty$, $z' = \infty$. Für $t = +\infty$, ist $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$.

Auch in diesem Falle ist der Nullpunkt der Asymptotenpunkt.

c) Es sei λ_3 positiv und l' negativ.

Für $t = -\infty$, ist $x' = \infty$, $y' = \infty$, $z' = 0$. Für $t = +\infty$, ist $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = \infty$.

Der Asymptotenpunkt der Raumcurven ist hier der unendlich ferne Punkt der z' -Axe.

d) Es sei λ_3 negativ und l' positiv.

Für $t = -\infty$, ist $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = \infty$. Für $t = +\infty$, ist $x' = \infty$, $y' = \infty$, $z' = 0$.

Wie im vorigen Falle ist der Asymptotenpunkt der Raumcurven der unendlich ferne Punkt der z' -Axe.

Wenn also λ_3 und l' das nämliche Vorzeichen haben, ist der Nullpunkt der Asymptotenpunkt der Bahncurven. Dagegen ist, wenn λ_3 und l' entgegengesetztes Vorzeichen haben, der unendlich ferne Punkt der z' -Axe der Asymptotenpunkt der Raumcurven, während die Bahncurven in der $x'y'$ -Ebene den Nullpunkt immer als Asymptotenpunkt haben. Sind λ_3 und l' beide positiv, wird mit wachsender Zeit alles nach dem Unendlichen hinströmen, während, wenn sie beide negativ sind, alles nach dem Nullpunkte, also dem Ruhepunkte, strömt, der doch erst für $t = +\infty$ erreicht wird.

Ist λ_3 positiv und l' negativ, werden alle Theilchen, die nicht der $x'y'$ -Ebene angehören, nach dem unendlich fernen Punkte der z' -Axe strömen, während die Theilchen der $x'y'$ -Ebene dem Nullpunkte zuströmen.

Ist endlich λ_3 negativ und l' positiv, wird alles nach den unendlich fernen Punkten der $x'y'$ -Ebene strömen, und zwar so dass die Raumcurven sich dieser Ebene asymptotisch nähern, mit Ausnahme der Punkte der z' -Axe, die dem Nullpunkte zuströmen werden. In allen vier Fällen haben wir also als Bahncurven oder Stromlinien spiralen-ähnliche Raumcurven um die z' -Axe, sowohl oberhalb wie

unterhalb der $x'y'$ -Ebene, welche in der Strömung die Rolle einer Trennungsebene spielt.

IV. Nehmen wir an, die beiden complexen Wurzeln der Gleichung (λ) seien *rein imaginär*, also $l' = 0$, so lauten in diesem Falle die Gleichungen der Bahncurven oder Stromlinien:

$$x' = \alpha' \cos l''t - \beta' \sin l''t$$

$$y' = \alpha' \sin l''t + \beta' \cos l''t$$

$$z' = \gamma e^{\lambda_3 t}$$

Wenn wir aus den beiden ersten Gleichungen t eliminieren, erhalten wir:

$$x'^2 + y'^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 = \text{const.}$$

Die Projektionen der Bahncurven auf der Ebene $x'y'$ sind also Ellipsen, die alle ihren Mittelpunkt im Nullpunkte haben, und deren Hauptaxen von denselben Richtungen sind. Jedes Theilchen bewegt sich auf einer Cylinderfläche, deren Axe die z' -Axe ist, und die von der $x'y'$ -Ebene in einer Ellipse geschnitten wird. Die z' -Axe selbst ist eine Bahncurve. Alle Bahncurven, die in der $x'y'$ -Ebene liegen, sind ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsen. Wenn λ_3 positiv ist, werden mit wachsender Zeit alle Theilchen, die nicht der $x'y'$ -Ebene angehören, nach dem Unendlichen hinströmen, während, wenn λ_3 negativ ist, alle diese Theilchen sich der $x'y'$ -Ebene nähern werden, und zwar so, dass sie diese Ebene erst für $t = \infty$ erreichen. Wie im vorigen Falle gilt auch hier, dass die einzelnen Windungen der räumlichen Stromlinien desto dichter zusammen liegen, je näher man der $x'y'$ -Ebene kommt, und dass ihr Abstand um so grösser wird, je mehr man sich von dieser Ebene in der

Richtung der z' -Axe entfernt. In der nächsten Nähe der $x'y'$ -Ebene muss der Abstand der einzelnen Windungen unendlich klein sein.

V. Die Discriminante der kubischen Gleichung (λ) möge verschwinden, also von den Wurzeln dieser Gleichung sind zwei zusammenfallend. In diesem Falle sind die Wurzeln immer reel.

Nehmen wir an, es sei $\lambda_1 = \lambda_2$.

Es war früher:

$$x + m_1 y + n_1 z = \xi = a e^{\lambda_1 t}$$

$$x + m_2 y + n_2 z = \eta = \beta e^{\lambda_2 t}$$

$$x + m_3 y + n_3 z = \zeta = \gamma e^{\lambda_3 t}.$$

Setzen wir jetzt $\lambda_2 = \lambda_1 + h$, so werden wir für die beiden ersten Gleichungen bekommen:

$$x + \frac{BG - H(A - \lambda_1)}{DH - G(E - \lambda_1)} y + \frac{CD - F(A - \lambda_1)}{FG - D(I - \lambda_1)} z = a e^{\lambda_1 t} = F(t, \lambda_1, a)$$

$$\begin{aligned} x + \frac{BG - H(A - (\lambda_1 + h))}{DH - G(E - (\lambda_1 + h))} y + \frac{CD - F(A - (\lambda_1 + h))}{FG - D(I - (\lambda_1 + h))} z = \\ = (\alpha + h\beta) e^{(\lambda_1 + h)t} = F(t, \lambda_1 + h, \alpha + h\beta). \end{aligned}$$

Hiervon erhalten wir durch Subtraktion:

$$\begin{aligned} & \frac{(DH - EG)H + (AH - BG)G}{[DH - G(E - \lambda_1)]^2 + hG[DH - G(E - \lambda_1)]} y + \\ & + \frac{(FG - DI)F + (AF - CD)D}{[FG - D(I - \lambda_1)]^2 + hD[FG - D(I - \lambda_1)]} z = \\ & = \frac{F(t, \lambda_1 + h, \alpha + h\beta) - F(t, \lambda_1, \alpha)}{h}. \end{aligned}$$

Gehen wir jetzt zur Grenze, indem wir $h = 0$ setzen, erhalten wir, indem wir die Coefficienten von y und z abkürzend mit c_1 und c_2 bezeichnen:

$$c_1 y + c_2 z = \frac{\partial (a e^{\lambda_1 t})}{\partial \lambda_1} + \beta \frac{\partial (a e^{\lambda_1 t})}{\partial a} = (\alpha t + \beta) e^{\lambda_1 t}.$$

Setzen wir $c_1 y + c_2 z = \eta$, so haben wir in diesem Falle als Integrale des Systems (1) die folgenden Gleichungen erhalten:

$$\begin{aligned} \xi &= a e^{\lambda_1 t} \\ \eta &= (\alpha t + \beta) e^{\lambda_1 t} \\ \zeta &= \gamma e^{\lambda_3 t}. \end{aligned} \tag{5}$$

Es sind wieder ξ , η , ζ als neue schiefwinklige Coordinaten aufzufassen, und die Gleichungen (5) liefern uns daher die Bahncurven oder Stromlinien in dem neuen Coordinatensystem.

Für die Projektionen der Bahncurven in der $\xi\eta$ -Ebene haben wir die beiden ersten Gleichungen in (5), aus denen sich ergibt:

$$\eta = \xi \left(\frac{\beta}{a} + \frac{1}{\lambda_1} l \left(\frac{\xi}{a} \right) \right).$$

Diese Projektionscurven sind zugleich die Bahncurven für die Theilchen, die in der $\xi\eta$ -Ebene liegen, und die während ihrer ganzen Bewegung in dieser Ebene bleiben werden.

Die Curven in der $\xi\eta$ -Ebene liegen entweder vollständig rechts oder vollständig links von der η -Axe. Eine nähere Untersuchung der Curven zeigt, dass wenn $\xi = 0$ ist, ist auch $\eta = 0$ und in diesem Punkte wird die η -Axe von den Curven berührt. Es wird ausserdem $\eta = 0$ für $t = -\frac{\beta}{\alpha}$,

oder die Curven schneiden die ξ -Axe in einem Punkte, dessen Abstand vom Nullpunkt gleich $ae^{-\frac{\beta}{\alpha}\lambda_1}$ ist.

Wenn wir die Projektionen der Bahncurven in der $\xi\zeta$ -Ebene untersuchen wollen, so müssen wir zwei Fälle unterscheiden.

a) λ_1 und λ_3 haben das nämliche Vorzeichen. Die Curven in der $\xi\zeta$ -Ebene werden dann einen ähnlichen Verlauf haben wie im Falle I.

b) λ_1 und λ_3 haben entgegengesetztes Vorzeichen. In diesem Falle werden die Curven in der $\xi\zeta$ -Ebene verallgemeinerte Hyperbeln sein, wie im Falle II.

Diese Curven in der $\xi\zeta$ -Ebene sind selbst keine Bahncurven. Wie es aus den Gleichungen (5) hervorgeht, giebt es in diesem Falle keine Bahncurven, die in der $\xi\zeta$ -Ebene verlaufen, ausser der ξ -Axe. In der $\eta\zeta$ -Ebene dagegen, giebt es Bahncurven, die ganz in dieser Ebene verlaufen. Wir erhalten sie, wenn wir in (5) $a = 0$ setzen. Sie haben also die Gleichungen $\eta = \beta e^{\lambda_1 t}$ und $\zeta = \gamma e^{\lambda_3 t}$. Man sieht, dass sie verlaufen werden genau wie im Falle I oder II, je nachdem λ_1 und λ_3 dasselbe oder entgegengesetztes Vorzeichen haben.

Die η - und ζ -Axen sind Bahncurven, dagegen ist die ξ -Axe es nicht.

Die Richtung, worin die Strömung vor sich geht, hängt von dem Vorzeichen von λ_1 und λ_3 ab.

Wenn beide positiv sind, wird alles mit wachsender Zeit nach dem Unendlichen hinströmen.

Sind beide negativ, wird alles auf den Ruhepunkt zuströmen, der für $t = +\infty$ erreicht wird.

Ist λ_1 positiv und λ_3 negativ, so wird mit wachsender Zeit alles nach den unendlich fernen Punkten der $\xi\eta$ -Ebene strömen, mit Ausnahme der Theilchen, die auf der ξ -Axe liegen, und die dem Ruhepunkte zuströmen werden.

Wenn umgekehrt λ_1 negativ und λ_3 positiv ist, wird alles nach dem unendlich fernen Punkt der ξ -Axe strömen, mit Ausnahme der Theilchen in der $\xi\eta$ -Ebene, die nach dem Ruhepunkte strömen werden.

Es sind hier die $\xi\eta$ -Ebene und die $\eta\xi$ -Ebene Trennungsebenen in Bezug auf die Strömung, dagegen ist die $\xi\xi$ -Ebene, wie in den Fällen I und II, wo die Wurzeln der Gleichung (λ) alle reel und verschieden waren, es nicht mehr.

Im Falle a) gehen alle Bahncurven durch den Ruhepunkt.

Im Falle b) gehen die Bahncurven nicht durch den Ruhepunkt, mit Ausnahme der Curven in der $\xi\eta$ -Ebene und der ξ -Axe, und die Curven im Raume nähern sich der $\xi\eta$ -Ebene und der ξ -Axe asymptotisch.

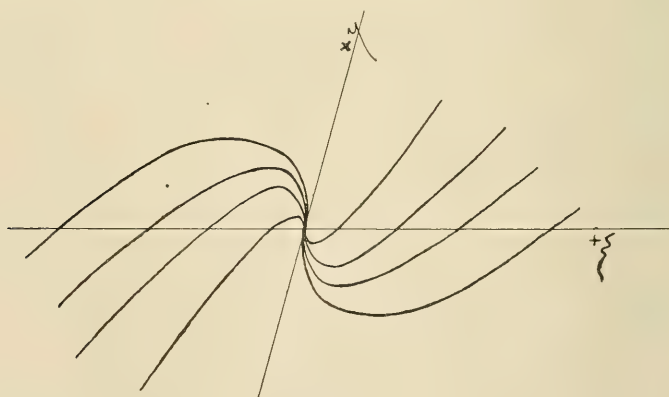


Fig. 3. $\lambda_1 > 0$.

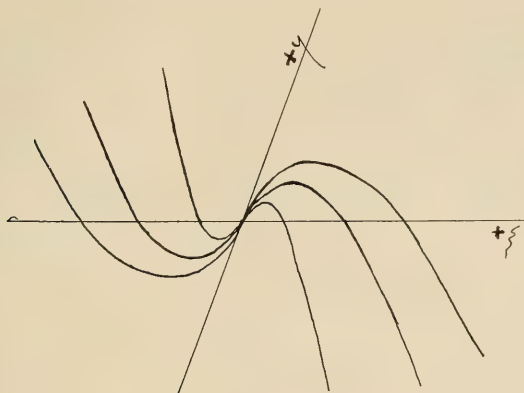


Fig. 3'. $\lambda_1 < 0$.

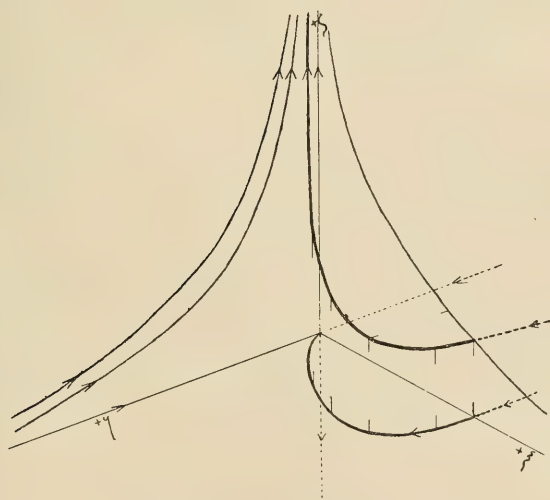


Fig. 3''. $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. $\lambda_3 > 0$.

Fig. (3) und (3') zeigen, wie die Bahncurven in der $\xi\eta$ -Ebene verlaufen, und Fig. (3'') zeigt eine Bahncurve im Raume nebst Bahncurven in der $\eta\zeta$ -Ebene.

VI. Wir werden jetzt den Fall betrachten, wo *alle drei Wurzeln der kubischen Gleichung* (λ) *zusammenfallen*, und wo wir also haben werden:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3.$$

In analoger Weise wie im Falle V erhalten wir hier für die Bahncurven oder Stromlinien die folgenden Gleichungen:

$$\xi = \alpha e^{\lambda_1 t}$$

$$\eta = (\alpha t + \beta) e^{\lambda_1 t}$$

$$\zeta = (\alpha t^2 + \beta t + \gamma) e^{\lambda_1 t}.$$

Von den Coordinatenaxen ist hier nur die ζ -Axe eine Bahncurve, und von den Coordinatenebenen giebt es nur in der $\eta\zeta$ -Ebene Bahncurven, die ganz in dieser Ebene verlaufen. Es verhalten sich ξ und η genau wie im vorigen Falle. Was ζ betrifft, so wird sie Null für $t = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$, vorausgesetzt dass $(\beta^2 - 4\alpha\gamma) \geq 0$ ist. Man findet auch, dass Maxima oder Minima von ζ für

$t = \frac{-(\lambda_1 \beta + 2\alpha) \pm \sqrt{\lambda_1^2 (\beta^2 - 4\alpha\gamma) + 4\alpha^2}}{2\lambda_1 \alpha}$ eintreten, doch nur wenn $(\lambda_1^2 (\beta^2 - 4\alpha\gamma) + 4\alpha^2) > 0$ ist. Was die Projektionen der Bahncurven in der $\xi\eta$ -Ebene betrifft, so haben sie dieselbe Gleichung wie im letzten Falle. Die Projektionen in der $\xi\zeta$ -Ebene dagegen haben die Gleichung:

$$\zeta = \frac{\xi}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\lambda_1^2} l^2 \left(\frac{\xi}{\alpha} \right) + \frac{\beta}{\lambda_1} l \left(\frac{\xi}{\alpha} \right) + \gamma \right).$$

Man sieht, dass die Curven entweder vollständig rechts oder vollständig links von der ζ -Axe verlaufen. Es zeigt sich, dass für $\xi = 0$, ist auch $\zeta = 0$, und diesem Punkte, also dem Ruhepunkte, entspricht der Werth $t = \pm \infty$. Die

Curven in der $\xi\zeta$ -Ebene berühren die ζ -Axe im Nullpunkt. Man construiert sich doch am einfachsten die Bahncurven im Raume, wenn man von ihren Projektionen in der $\xi\eta$ -Ebene ausgeht, und von ihren Punkten aus die betreffenden Coordinaten ζ abträgt. Die ebenen Bahncurven, die in der $\eta\zeta$ -Ebene liegen, haben die Gleichungen

$$\eta = \beta e^{\lambda_1 t}$$

$$\zeta = (\beta t + \gamma) e^{\lambda_1 t}$$

oder

$$\zeta = \eta \left(\frac{\gamma}{\beta} + \frac{1}{\lambda_1} l \left(\frac{\eta}{\beta} \right) \right).$$

Sie gehen alle durch den Ruhepunkt und berühren dort die ζ -Axe, und sind übrigens ganz den Bahncurven in der $\xi\eta$ -Ebene des vorigen Fálles ähnlich.

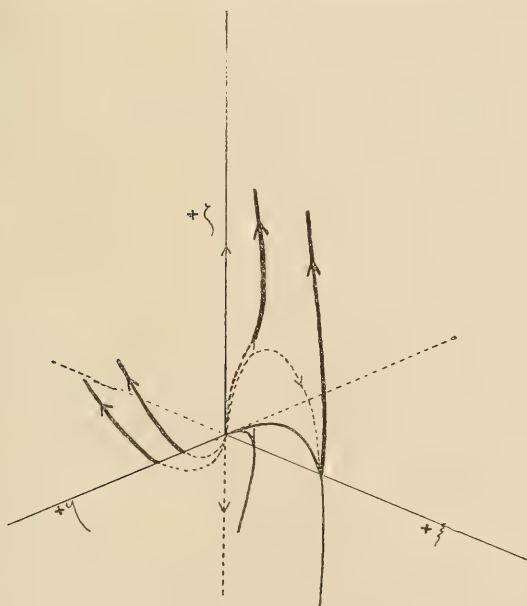


Fig. 4. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 > 0$.

In diesem Falle hat man nur eine Trennungsebene in Bezug auf die Strömung, nämlich die $\eta\zeta$ -Ebene, und nur ebene Bahncurven in dieser Ebene. Wenn λ_1 positiv ist, wird mit wachsender Zeit alles vom Ruhepunkte wegströmen, und wenn λ_1 negativ ist, alles zuströmen. Fig. (4) zeigt, wie die Curven in diesem Falle verlaufen.

Incompressibilität.

Wenn ein Continuum incompressibel sein soll, so ist wie bekannt die Bedingung hierfür, dass die Divergenz des Geschwindigkeitsvektors verschwindet, also

$$\operatorname{div} (u, v, w) = 0, \quad \text{d. h.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Wenn daher der Bewegungsvorgang des Continuums durch die Gleichungen (1) definiert ist, lautet die Incompressibilitätsbedingung:

$$A + E + I = 0.$$

Nun ist aber:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = A + E + I.$$

Soll also das Continuum incompressibel sein, muss die Summe der Wurzeln der kubischen Gleichung (λ) verschwinden. Man sieht folglich, dass die Incompressibilitätsbedingung in den Fällen II, III c und d *), und V b erfüllt

*) Von zahlentheoretischen Untersuchungen ausgehend ist Hrr. *Carl Stormer* zu entsprechenden Bahncurven wie in diesem Falle gekommen (siehe: *Nogle geometriske satser fra den moderne taltheorie*, pag. 18—23. Christiania videnskabselskabs forhandling 1902).

sein kann. Dagegen kann ein incompressibles Continuum sich nicht wie in den Fällen I, III a und b, IV, V a und VI bewegen.

Wirbellose Bewegung.

Die Bedingung für wirbellose oder rotationslose Bewegung drückt sich, wie bekannt, dadurch aus, dass der Curl des Geschwindigkeitsvektors immer gleich Null ist, also

$$\text{curl } (u, v, w) = 0,$$

oder

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

In unsrem Falle liefert dies die folgenden Bedingungen für die Coefficienten des Gleichungssystems (1):

$$H - F = 0, \quad C - G = 0, \quad D - B = 0.$$

Wenn wir daher rotationslose Bewegung haben sollen, müssen die Gleichungen (1) die folgende Form haben:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + By + Cz \\ \frac{dy}{dt} &= Bx + Ey + Fz \\ \frac{dz}{dt} &= Cx + Fy + Iz. \end{aligned} \tag{1'}$$

Die kubische Gleichung (λ) lautet dann:

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & B & C \\ B & E - \lambda & F \\ C & F & I - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{\lambda'}$$

Diese Gleichung ist, wie man sieht, von derselben Form wie die Gleichung des Hauptaxenproblems bei den Flächen 2ten Grades. Sie kann daher nur reelle Wurzeln haben.

In den Fällen III und IV ist folglich rotationslose Bewegung nicht möglich, was auch unmittelbar aus der geometrischen Betrachtung hervorgeht.

Wenn $\text{curl}(u, v, w) = 0$ ist, existiert bekanntlich ein Geschwindigkeitspotential, und die Componenten des Geschwindigkeitsvektors lassen sich als partielle Ableitungen einer einzigen Funktion S ausdrücken. Man hat also dann:

$$u = Ax + By + Cz = -\frac{\partial S}{\partial x}$$

$$v = Bx + Ey + Fz = -\frac{\partial S}{\partial y}$$

$$w = Cx + Fy + Iz = -\frac{\partial S}{\partial z}$$

Hieraus ergibt sich für das Geschwindigkeitspotential S :

$$S = -\frac{1}{2} (Ax^2 + Ey^2 + Iz^2 + 2Bxy + 2Cxz + 2Fzy).$$

$S = \text{const.}$ liefert Flächen, die von den Stromlinien orthogonal geschnitten werden. Diese Flächen haben also in unsrem Falle, wo wir von den Gleichungen (1') ausgehen, die folgende Gleichung:

$$Ax^2 + Ey^2 + Iz^2 + 2Bxy + 2Cxz + 2Fyz = \text{const.}$$

Dies sind ähnliche und ähnlich gelegene Flächen 2ten Grades, die ihren Mittelpunkt im Nullpunkt haben. Aus der Gleichung (λ') folgt, dass im Falle I die Flächen Ellipsoide, im Falle II Hyperboloide sind. Da die Axen 0ξ , 0η , 0ζ auch hier Stromlinien sind, muss das früher in diesen Fällen schiefwinklige Axensystem rechtwinklig werden, wenn die Bewegung wirbellos ist. Im Falle V a) sind die Flächen constanten Potentials Rotationsellipsoide, und im Falle VI Kugeln. Wenn daher bei rotationsloser Be-

wegung die 3 Wurzeln der kubischen Gleichung (λ) zusammenfallen, werden die Bahncurven aus geraden Linien durch den Ruhepunkt bestehen.

Wenn kein Geschwindigkeitspotential existiert, giebt es, wie bekannt, *Wirbellinien*, d. h. Linien, die in jedem Punkte die Richtung des Curls, also dieselbe Richtung wie die Drehaxe des Theilchens, haben. Sei τ ein willkürlicher Curvenparameter, so sind hier die Wirbellinien durch die folgenden Gleichungen definiert:

$$\frac{dx}{d\tau} = H - F$$

$$\frac{dy}{d\tau} = C - G$$

$$\frac{dz}{d\tau} = D - B.$$

Hieraus ergibt sich:

$$x = c_1 + (H - F)\tau$$

$$y = c_2 + (C - G)\tau$$

$$z = c_3 + (D - B)\tau.$$

Die Wirbellinien bestehen also aus einer Schaar paralleler Geraden. Durch jeden Punkt des Raumes geht eine solche Gerade hindurch. Die Rotationsachsen behalten also in allen auftretenden Fällen ihre Richtung unverändert.

DYBDEN AF ØIEREN

AF

ANDREAS HOLMSEN



ALB. CAMMERMEYERS FORLAG

Morten Johansens Bogtrykkeri. — Kristiania 1903.

DYBDEN AF ØIEREN.

Af

ANDREAS HOLMSEN.

For nogle aar siden offentliggjorde jeg i Archivet nogle undersøgelser over seiches i de norske indsjøer.¹

En af de sjøer, hvori jeg havde iagttaget disse eendommelige oscillerende bevægelser, var *Øieren*.

Som det vil erindres, kommer bevægelserne først til syne, naar man en tid lang ved hjælp af hertil egnede apparater nøie betragter sjønivaaet. Man vil da kunne iagttage, at dette regelmæssig tiltager og aftager i løbet af bestemte tidsrum. I et vist antal minutter vil sjøen synes at stige, og derpaa vil den i lige mange minutter synes at falde for atter at stige og saa falde o. s. v. Tidsrummet mellem stigende og faldende nivaa viser sig i almindelighed lige langt ved samme sjø og er, hvad man forstaar ved bevægelsens svingetid — eller rettere dens halve svingetid, idet man regner en seiche's hele svingetid fra det tidspunkt, da nivaaet har naaet sit maximum eller minimum, og indtil det atter har naaet et nyt maximum eller minimum.

De i *Øieren* iagttagne seiches udmerker sig ved en betydelig længere svingetid end den, jeg ellers observerede

¹ B. XX, no. 1.

ved vore andre indsjøer. Medens der saaledes mellem hver gang, nivaaet forandrede sig fra stigende til faldende, medgik en tid af $21\frac{1}{2}$ min. ved Mjøsen, 19 min. ved Osen og kun 14 min. ved Storsjøen, var tidsrummet ved Øieren lidt over en halv time.

Denne forholdsvis lange svingetid af Øierens seiches var mig straks paafaldende. Først ved nærmere at tænke over aarsagen kunde jeg give en forklaring. Denne maatte nemlig være at søge i det forhold, at sjøen maatte antages at have et meget ringe dyb. Det var dengang ikke foretaget nogen oplodning, men ved at indsætte værdierne for svingetiden og sjøens længde i den teoretiske formel for seiches, kom jeg til det resultat, at Øierens gennemsnitsdyb ikke kunde overstige 25 m.¹

Sidste høst havde jeg anledning til at foretage en oplodning af sjøen, og da denne viste, at min formodning holdt stik, har jeg senere udført en mere nøiagtig beregning og skal her meddele resultaterne.

Forat man imidlertid skal kunne forstaa, hvorledes der af iagttagelser af seiches kan skaffes tilveie et middel til at udregne en indsjøs dyb, skal jeg først i største kortshed gjentage de væsentligste træk af disse eiendommelige bevægelers teori.

Naar man har taget et karbad, vil enkelte kanske have lagt merke til, at der i badevandet kan opstaa visse pendulære bevægelser. Hvis vandet paa en eller anden maade bringes ud af sit horizontale nivaa, vil tyngdekraften søge at bringe det tilbage til sin oprindelige stilling; men denne stilling vil ikke kunne indtages med én gang. Vandet vil først en tid svinge op og ned om sin horizontale stilling.

¹ L. c., side 27.

Man vil lægge merke til, at det snart kan skvulpe over paa den ene ende af karret, snart paa den anden. Denne vuggende bevægelse vil efterhvert blive mindre og mindre kraftig, men mellem hver gang, vandet naar op langs samme ende af karret, vil der medgaa lige langt tidsrum.

Bevægelserne kan kanske bedst illustreres ved nedenstaaende figur (1):

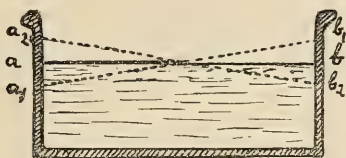


Fig. 1.

Lad $a - b$ betegne den oprindelige horizontale stilling af vandet. Hvis dette bringes ud af sit nivaa f. ex. til $a_1 - b_1$, vil det af tyngdekraften søges bragt tilbage til stillingen $a - b$, men paa grund af bevægelsens levende kraft vil det blive ført forbi denne og til stillingen $a_2 - b_2$. Derpaa vil det atter svinge tilbage henimod stillingen $a_1 - b_1$, og saa mod $a_2 - b_2$ o. s. v. Vi ser, at nivaaet ved midten af karret forbliver det samme — der danner sig her en knudezone —, medens forandringerne i nivaaet er større og større, jo længere vi kommer ud mod kanterne.

Naar bevægelserne foregaar paa denne maade, siger vi, at de er éknudede.

Men de kan ogsaa foregaa paa andre maader, f. ex. som illustreret i omstaaende fig. 2. Vi ser, at bevægelsen her foruden ved kanterne ogsaa har et maximum ved

midten af karret, og at der mellem disse steder er to zoner, hvor nivaæet holder sig uforandret. Saadanne bevægelser kalder vi toknude. Bevægelserne kan desuden ogsaa have flere knudezoner — de kan være flerknude.

Stundom kan det indtræffe, at flere slags svingende bevægelser foregaar samtidig i karret; de bliver da mere komplicerede.

Foruden disse bevægelser, som vi har forudsat at foregaa langs karret, kan der ogsaa forekomme svingninger, der foregaar paatvers af samme.

De bevægelser, som ovenfor er beskrevet, er de enkleste slags seiches og kan med lethed studeres i et laboratorium.



Fig. 2.

Forel har allerede for lang tid siden godtgjort, at den af Merian¹ opstillede formel er anvendbar paa éknudede seiches i et regelmæssigt bassin med overalt samme dyb. Efter denne er svingetiden for en halv seiche (t) — 3: tiden, der medgaar fra, at nivaæet paa et sted har naaet sit maximum til det har naaet sit minimum —

$$= \frac{l}{\sqrt{gh}} \text{ sekunder,}$$

hvor l betegner bassinets længde og h dets dybde.

¹ Ueber die Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten in Gefäßen. Basel 1828.

Et sjøbækken vil imidlertid aldrig være et saadant ideelt bassin, hvor dybet overalt er lige stort. For et uregelmæssigt bassin har imidlertid *P. du Boys*¹ af integraludtrykket $t = \int_0^l \frac{ds}{\sqrt{gh}}$ udledet følgende i praksis anvendbare formel:

$$t = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{n=0}^n \frac{l_n}{\frac{1}{2} (\sqrt{h_{n-1}} + \sqrt{h_n})},$$

hvor n betegner et vist antal dele, hvori sjøen er delt op efter længden, og hvor hver enkelt dels bund kan betragtes som jævnt skraanende eller horizontal. Størrelserne h_{n-1} betegner da det største og mindste dyb inden hver enkelt del.

Under de forudsætninger, at dybet i det hele taget er en meget liden størrelse i sammenligning med sjøens længde, og at dybet kun forandrer sig lidet paa de forskellige steder i sjøen, kan man imidlertid med stor tilnærmelse til det rigtige anvende en enklere formel. Vi kan da, som først paavist af *Sir William Thomson*², regne med sjøens midlere dyb. Hvis vi kalder gennemsnitsdybet h_m , kan udtrykket skrives saaledes:

$$t = \frac{l}{(gh_m)^{\frac{1}{2}}} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\pi \frac{h_m}{l} \right)^2 \right].$$

Denne formel kan vi bruge ved mange sjøer, hvor vi kjender længden og gennemsnitsdybet. Jeg har før godtgjort, at svingetiden for de i Osen observerede seiches stemmer godt med den, der kan beregnes af formelen.

¹ Essai théorique sur les seiches. Arch. de sc. ph. et nat. B. XXV. Genève, 1891, p. 628.

² Se: *Forel*: «Le Léman», b. II, p. 78.

Men omvendt maa ogsaa formelen kunne bruges til at udregne gennemsnitsdybet, naar vi kjender sjøens længde og svingetiden for dens éknudede seiches.

Da selv Øierens maximale dyb — 71 m. — er en meget liden størrelse i forhold til sjøens længde — henimod 30 km. —, maa formelen kunne anvendes ved denne sjø.

Naar vi ikke tager hensyn til 2den potensudtrykket, der bliver en saa liden størrelse, at det kan sættes ud af betragtning, skulde vi følgelig kunne udføre en approximativ beregning af Øierens gennemsnitsdyb ved i ligningen:

$$h_m = \frac{1}{g} \left(\frac{l}{t} \right)^2$$

at indføre værdierne for l og t .

Længden af Øieren fra sydenden og nordover til Aarnestangen er efter rektangelkartet 27 km. Den halve svingetid for de i sjøen observerede seiches viste sig at være meget nær 32 minutter. Følgelig skulde vi da faa:

$$h_m = \frac{1}{9.82} \left(\frac{27000}{32 \cdot 60} \right)^2 = 20 \text{ m.}$$

Den omtalte oplodning af Øieren foretog jeg i begyndelsen af november 1902, under sjøens almindelige regulerede vandstand — 4.2 m. paa Mørkfos vandmerke.

Ved lodningerne benyttedes en ved kanalvæsenet konstrueret loddemaskine, der i principet ikke skiller sig saa væsentlig fra Hörnlimann's.¹ Den anvendte loddeline er en 0.7 mm. tyk traad forarbejdet af extra staal, og loddet et ca. 4 kg. tungt blylod.

Jeg begyndte i sydenden og loddede i et profil langs efter midten af sjøen med omtrent 550 m.s afstand mellem

¹ Ueber Seetiefenmessungen, Schweiz. Bauzeitung 1886.

lodskuddene. Desuden loddede jeg i flere profiler tværs over sjøen, og i disse var der kun ca. 135 m.s afstand mellem lodskuddene.

Fra sydenden holder sjøen sig grund i ca. 2 m. til kort nordenfor *Sandstangen*, hvor der endnu er et dyb af kun vel 5 m. Men herfra falder bunden raskt af til 60 m.s dyb i en linje mellem *Tangen* og *Sververud* og holder sig saa nordenfor jevn i vel 10 km.

Paa denne lange strækning forandrer dybet sig meget lidet. I en længde af ca. 4 km. fra *Aslakby* fandt jeg saaledes ikke mere end et par meters dybdeforskjel. Bunden falder i det hele taget ganske svagt af ned til maximumsdybet 71 m. ud for *Gillingsrud*, og hæver sig saa atter noget, men sjøen holder sig over 60 m. dyb nordover helt til *Hurnes*. Midt ud for *Prestaaen* — 15 km. fra sydenden — er dybet 56 m., og paa en strækning af vel 1 km. herfra holder sjøen sig fremdeles forholdsvis dyb. Men derpaa aftager dybden meget sterkt. I en linje mellem *Kanterud* og *Kreppa* er det største dyb kun lidt over 5 m., og i hele den nordlige, bredeste del af Øieren er det kun i en smal rende, at bunden ligger under dette dyb. I et tverprofil mellem *Fladebydalen* og *Barkenes* blev der saaledes med ca. 175 m.s afstand mellem lodskuddene fundet følgende dybder:

2.5 — 2.2 — 2.3 — 3.0 — 2.3 — 5.0 — 3.1 — 4.7 — 5.0 —
5.5 — 6.1 — 3.5 — 3.5 — 3.3 — 3.2 — 3.2 m.

Paa enkelte steder i den nordligste del er sjøen udenfor elfefaret saa grund, at man under lav vandstand ikke kan komme frem med en almindelig baad.

Af tverprofilerne i sjøens sydlige del viser det sig, at bunden falder meget raskt af fra bredderne.

I et profil fra *Raanes* til *Aslakby* gaar saaledes dybet ned under 60 m. allerede i en afstand af omtrent 200 m. fra den vestre og 350 m. fra den østre bred. Nogle kilometer nordenfor fandt jeg i et profil mellem *Vatsholen* og *Evenrud* med ca. 135 m.s afstand mellem lodskuddene følgende dybder: 37.5 — 56.6 — 64.7 — 68.3 — 69.3 — 69.2 — 69.5 — 64.5 — 38.1 — 13.5 — 4.0 m.

Vi ser saaledes, at der ved midten af sjøen haves et forholdsvis bredt bælte, hvori bunden holder sig ganske flad.

Ogsaa nordenfor er det samme tilfælde. I et profil mellem *Skøien* og *Tingstad* fandtes saaledes følgende dybder: 4.7 — 7.6 — 29.0 — 41.2 — 48.0 — 52.7 — 55.0 — 56.0 — 56.5 — 56.5 — 28.6 m.

Det fremgaar følgerig af det ovenfor anførte, at Øieren i det hele taget er en forholdsvis grund sjø. I hele den nordlige del er den øiensynlig opgrundet af den mængde materiale, som i tidernes løb er medført af Glommen. Søndenfor tiltager dog dybden ganske betydelig, og her har sjøbækkenet den udprægede traugform, som er er saa karakteristisk for mange af vore indsjøer.

De foretagne lodninger er ikke tilstrækkelige til, at man heraf paa almindelig maade nøiagtig kan beregne sjøens kubikindhold. For at kunne gjøre dette maa man være i besiddelse af et overmaade stort antal lodskud. Men tilnærmelsesvis kan man paa en anden maade finde kubikindholdet.

Jeg har paa et kart over sjøen (Fig. 3) afsat de forskjellige lodskud og optrukket kurver gennem de steder, hvor der er ligestort dyb. Først har jeg indtegnet kurven for 60 m.s dyb og derpaa den for 5 m.s dyb. Den sandsynlige retning af kurverne for 10, 20, 30, 40 og 50 m.s dyb lod sig

herved lettere bestemme, idet disses beliggenhed selvfølgelig maatte være mellem de to førstnævnte kurver.

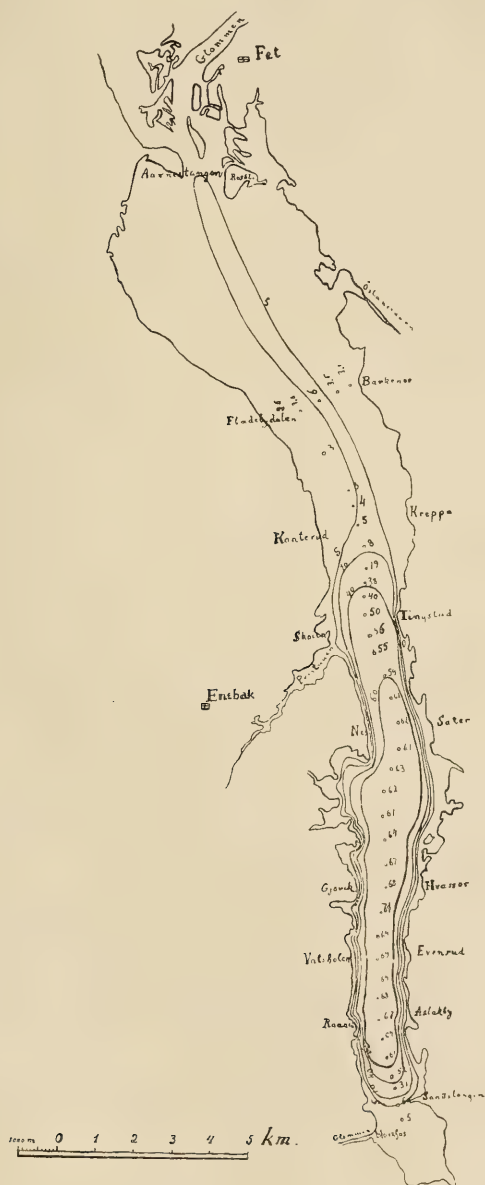


Fig. 3. Kart over Øieren.

Efterat kurverne var afsat paa kartet, udmaaltes med et planimeter de arealer, der indesluttedes af hver kurve. Jeg kunde paa denne maade bestemme, hvor stor del af sjøen var dybere end 5 m., 10 m., 20 m. o. s. v.

Naar jeg gaar ud fra, at det gennemsnitlige dyb er 2.5 m. for den del af sjøen, der har et dyb mellem 0 og 5 m., samt at gennemsnitsdybet er 7.5 m. for den del, som er mellem 5 og 10 m. dyb, og videre, at den del, hvis dyb er mellem 10 og 20 m., gennemsnitlig er 15 m. dyb o. s. v., lader kubikindholdet sig tilnærmelsesvis beregne. Jeg faar da:

73 km. ² areal med mellem 0 og 5 m.s dyb	—	×	2.5 =	183 mill. m. ³
33 » » med større end 5 m.s »	—	×	5 =	165 » »
20 » » —»—	10 » »	—	×	7.5 = 150 » »
18 » » —»—	20 » »	—	×	10 = 180 » »
17.5 » » —»—	30 » »	—	×	10 = 175 » »
16 » » —»—	40 » »	—	×	10 = 160 » »
14.5 » » —»—	50 » »	—	×	10 = 145 » »
10.5 » » —»—	60 » »	—	×	10 = 105 » »
Tilsammen —				1263 mill. m. ³

Øieren skulde efter dette rumme mellem 1200 og 1300 mill. m.³ Divideres kubikindholdet med sjøens fladeindhold, 73 km.², finder vi, at dens gennemsnitsdyb skulde være mellem 17 og 18 m.

Dette resultat stemmer næsten overraskende godt med det, som beregnedes af sjøens seiches.

Men det bør erindres, at der er flere omstændigheder, som tyder paa, at Øieren er en sø, hvor disse eiendommelige oscillerende bevægelser kan foregaa med stor regelmæssighed. Sjøen har for det første en temmelig regelmæssig form med omtrent overalt samme længderetning. Dernæst er der ikke store variationer i dens dybdeforhold.

Dybet er i det hele taget lidet, og det forandrer sig ikke stort mellem nærliggende steder. Bunden gaar følgelig ikke op og ned og danner en bølget overflade, men holder sig temmelig jevn med en svag skraaning ned til maximumsdybet. Sjøbækkenet kan saaledes ansees som et forholdsvis regelmæssigt bassin, og for en del maa vel den gode overensstemmelse i de ovenfor fundne resultater tilskrives dette forhold.

Denne interessante anvendelse af seiches til at udregne en indsjøs dyb er med held forsøgt flere gange. *Forel* paaviste saaledes¹ ved hjælp af denne metode, at Walensjøens gennemsnitsdyb maatte være større end det tidligere antagne maximaldyb — et forhold, som senere lodninger fuldstændig bekræftede. *H. C. Russel* beregnede ved hjælp af seiches dybet af Lake George i den sydøstlige del af Australien og godtgjorde ved senere lodninger, at beregningen stemte paa en udmerket maade overens med det virkelige forhold.

Metoden har derimod vist sig mindre anvendbar ved meget dybe søer. Ved f. ex. at anvende den paa forholdene ved Genfersjøen kommer man til det resultat, at denne sø skulde have et gennemsnitsdyb af 112 m., medens dens virkelige gennemsnitsdyb er 153 m. Men selv om man saaledes ikke altid med lige stort held kan udregne en søs dyb af dens seiches, vil man dog heri ofte have et bekvemt middel til at danne sig begreb om det omtrentlige gennemsnitsdyb.

¹ Le Léman, b. II, p. 80. Se ogsaa prof. *Forel's* foredrag under den VII internationale geografkongres i Berlin 1899.

FRESH-WATER ENTOMOSTRACA

FROM

CHINA AND SUMATRA

BY

G. O. SARS

WITH 4 AUTOGRAPHIC PLATES



ALB. CAMMERMEYERS FORLAG

FRESH-WATER ENTOMOSTRACA FROM CHINA AND SUMATRA

By

G. O. SARS

WITH 4 AUTOGRAPHIC PLATES

INTRODUCTION.

The far greater number of the species recorded in this paper have been raised by the present author, many years ago, from dried mud, and accordingly have been examined in the living state, in most cases, moreover, during several successive generations. Some few additional forms have been picked up from a sample preserved in alcohol and taken by Mr. *Iversen*, preparator (at that time) off the zoological Museum, during his stay in the north-eastern part of Sumatra (territories of Deli and Langkat) in the year 1888. I am also indebted to him for a parcel of dried mud taken from some swamps in the same part of the country. Several interesting forms, to be mentioned in the present paper, have been reared in my aquaria from this mud during the summers of 1889 and 1890. The dried material from China consisted of several small parcels of a reddish clay taken partly from fish-ponds, partly from inundated rice-fields in the neighbourhood of Puching. From this material also,

which was procured through the kind intervention of my friend and colleague Prof. R. Collett, a number of Entomostraca, belonging to the 3 leading groups *Cladocera*, *Copepoda* and *Ostracoda*, have been successfully raised. These forms will likewise be mentioned in the present paper, because China and Sumatra, according to the the general assumption of zoologists, belong to a common zoogeographical region. As will be shown below, several of the forms observed are apparently new to science, whereas others have turned out to be identical with forms, partly known from Europe, partly from other parts of the world. On the whole several additional instances of the extraordinary wide geographical distribution of certain fresh-water Entomostraca will be demonstrated in the present paper.

I give below separate lists of the several species observed from each locality.

I. SUMATRA.

PHYLLOPODA.

1. *Limnadia lenticularis* (Lin.).

CLADOCERA.

2. *Diaphanosoma Sarsi*, Rich.
3. *Daphnia longispina* (Müll.).
4. *Simocephalus exspinosus* (de Geer).
5. *Scapholeberis Kingi*, G. O. Sars, n. sp.
6. *Criodaphnia Rigaudi*, Rich.
7. *Moinodaphnia Macleayi* (King).
8. *Macrothrix spinosa*, King.
9. *Ilyocryptus longiremis*, G. O. Sars.
10. *Chydorus sphaericus* (Müll.).

11. *Leydigia propinqua*, G. O. Sars, n. sp.
12. *Alona tenuicaudis*, G. O. Sars.
13. — *guttata*, G. O. Sars.
14. — *acuticostata*, G. O. Sars, n. sp.
15. *Pseudalona longirostris* (Daday).

COPEPODA.

16. *Diaptomus orientalis*, Brady.
17. *Cyclops Leuckarti*, Claus.
18. — *hyalinus*, Rehberg.

OSTRACODA.

19. *Cypris purpurascens*, Baird.
20. *Hemicypris pyxidata* (Moniez).
21. — *ovata*, G. O. Sars, n. sp.
22. — *megalops*, G. O. Sars, n. sp.
23. *Leptocypris papyracea*, G. O. Sars, n. gen. & sp.
24. *Notodromas oculata*, G. O. Sars, n. sp.
25. *Cypria crenulata*, G. O. Sars, n. sp.
26. *Pionocypris turgida*, G. O. Sars.
27. *Cypridopsis exigua*, G. O. Sars, n. sp.
28. — *adusta*, G. O. Sars, n. sp.
29. — *dubia*, G. O. Sars, n. sp.
30. *Dolerocypris fasciata* (Müll.).
31. *Candonopsis tenuis*, Brady.

II. CHINA.

CLADOCERA.

1. *Moina brevicornis*, G. O. Sars, n. sp.
2. *Bosmina cornuta* (Jurine).
3. *Macrothrix laticornis* (Jurine).
4. *Ilyocryptus sordidus* (Lièvin).

5. *Alona costata*, G. O. Sars.
6. *Chydorus sphaericus* (Müll.).

COPEPODA.

7. *Diaptomus Chaffonjoni*, Rich.
8. *Cyclops affinis*, G. O. Sars.

OSTRACODA.

9. *Cypris vittata*, G. O. Sars, n. sp.
10. — *decorata*, G. O. Sars, n. sp.
11. *Pionocypris turgida*, G. O. Sars.
12. *Cypridopsis vidua* (Müll.).
13. *Dolerocypris sinensis*, G. O. Sars, n. sp.
17. *Ilyocypris dentifera*, G. O. Sars, n. sp.
18. — *angulata*, G. O. Sars, n. sp.

By a comparison of the 2 above given lists, it will be found that only 2 species are common to both localities, viz., *Chydorus sphaericus* and *Pionocypris turgida*; otherwise the species from China are different from those from Sumatra. This apparent diversity may, however, in all probability be due to quite accidental circumstances.

PHYLLOPODA.

FAM. LIMNADIIDÆ.

1. *Limnadia lenticularis* (Lin.).

(Pl. I, figs. 1, 1 a).

Two specimens of a *Limnadia*, undistinguishable from the European form, developed in one of my aquaria prepared with mud from Sumatra, and both arrived to full

maturity. In order to show the identity, I give on the accompanying plate an habitus-figure (side-view) of one of the specimens drawn from life, and a figure of the caudal piece of the same specimen more highly magnified. It will be seen from the figure, that the lines of growth are very numerous, amounting to about 12 in each valve, indeed the greatest number I have ever met with in Norwegian specimens. Notwithstanding this, the size of the animal is rather inferior to that of the largest Norwegian specimens, the shell measuring in length only 8.60 mm by a height of 5.80 mm; but this may easily be accounted for by the fact, that the individual was reared in a comparatively small aquarium.

In my opinion, the Japonic form described by Prof. *Ishikawa* as *L. niponica* is likewise identical with the European species. The specimens examined by that author were all evidently quite young, having no egg-paquets and only 2 or 3 lines of growth on each valve, and, to judge from the figure given, they perfectly agreed in the shape of the shell with equal-sized specimens of *L. lenticularis* (see my account of this species in «Fauna Norvegicæ», Vol. I).

CLADOCERA.

FAM. SIDIDÆ.

1. *Diaphanosoma* Sarsi, Richard.

Occurrence.—Some few specimens of this form, first described by Dr. *Richard* from the lake Toba in Sumatra,

were picked up from the sample taken by Mr. *Iversen* in the north-eastern part of the country.

Distribution.—Brazil (the present author), New Guinea (Daday).

FAM. DAPHNIDÆ.

Daphnia longispina (Müller); forma typica.

Occurrence.—This well-known species developed rather abundantly in one of my aquaria prepared with mud from Sumatra, all the specimens being originally derived from 2 primitive individuals hatched from a single ephippium. The specimens on the whole agreed fairly well with the typical form, having the shell very pellucid and the shell-spine slender and more or less curved upwards.

Distribution.—Europe, Central Asia.

3. *Simocephalus exspinosus* (de Geer).

Occurrence.—A solitary, but fully developed female specimen of this form was secured from one of my aquaria prepared with mud from Sumatra.

Distribution.—Europe, Central Asia, Algeria, Cape of Good Hope (collection of Dr. *Purcell*).

4. *Scapholeberis Kingi*, G. O. Sars, n. sp.

(Pl. I, figs. 2 a—c).

Daphnia mucronata, King. 'On Australian Entomostracans'. Proceed of Roy. Soc. of Van Diemens Land, Vol. II, Part II, Pl. VI, E (not Müller).

Specific Characters.—Female. Head comparatively smaller than in *S. mucronata*, with the frontal part less prominent and more evenly rounded, ventral margin deeply concaved, dorsal nearly straight, rostral part obtusely

produced, cervical depression well marked. Carapace very tumid, seen laterally, oval quadrangular in outline, being transversely truncated behind, ventral edges of valves straight, slightly angular in front, and each produced behind to a spini-form projection of moderate length. Sculpture of shell rather coarse, consisting in the posterior part of very conspicuous curved transverse ridges running parallel to the hind edge, anterior part of valves likewise coarsely ridged, the ridges being partly crossed by wavy longitudinal striae. Eye large, with very conspicuous crystalline bodies, and, seen dorsally or ventrally, exhibiting its original duplicity very distinctly. Ocellus small and occurring near to the tip of the rostrum. Antennulae small, knob-like. Antennae and legs of the usual structure. Caudal part comparatively short and broad, with only 4 pairs of anal denticles, terminal claws of moderate length and smooth. Ephippium of the usual appearance.

Male much smaller than female, and on the whole resembling that of *S. mucronata*.

Colour very dark brownish gray, in some places nearly black.

Length of adult female 0.76 mm, of male 0.40 mm.

Remarks.—The above-described species is unquestionably identical with the Australian form recorded by King as *Daphnia mucronata*. It is certainly very nearly allied to the European species, but apparently specifically distinct, differing, as it does, not only in the much smaller size, but also in the shape of the head and in the less sharply angulated anterior part of the valves. The sculpture of the shell is, moreover, much coarser than in the European species.

Occurrence and Habits.—This form developed rather abundantly in one of my aquaria prepared with mud from Sumatra, and was watched during several successive generations. The specimens kept themselves, as a rule, in the uppermost part of the aquarium, moving slowly about, the belly constantly turned upwards and generally in immediate contact with the surface. At the close of the season the greater number of the specimens became provided with ephippia, and at the same time the very small males were often observed. Some few specimen of the present form were also picked up from the sample taken by Mr. *Iversen*.

Distribution.—Australia (*King*), Cape of Good Hope (coll. of Dr. *Purcell*).

5. *Ceriodaphnia Rigaudi*, Rich.

Occurrence.—This form also was raised in considerable number from the same parcel of mud that yielded the preceding species, and was also found occasionally in the above-mentioned sample.

Distribution.—Tonkin (*Richard*), Palestine (*idem*), Ceylon (*Daday*), Knysna, Cape Colony (the present author), Brazil (*idem*).

6. *Moina brevicornis*, G. O. Sars, n. sp.

(Pl. I, figs. 3, 3 a—b).

Specific Characters.—Female. Head comparatively large and somewhat procumbent, with a slight supra-ocular sinus, frontal part obtusely rounded, ventral margin evenly convex, cervical depression well marked. Carapace, seen laterally, rounded quadrangular in outline, with the hind edges distinctly insinuated above the middle, dorsal part in gravid specimens, as usual, more or less globularly

expanded. Sculpture of shell very delicate, inferior edges of valves fringed with small hairs. Eye rather large, with very conspicuous crystalline bodies. Antennulæ unusually short, when reflexed, scarcely extending to the base of the labrum, fusiform in shape, and clothed behind with delicate cilia. Antennæ and legs of the usual structure. Caudal part rather large, partly uncovered by the carapace, præ-anal portion scarcely attaining $\frac{1}{3}$ of the length of this part, and narrow conical in form; anal denticles 8 on each side, the outermost, as usual, bidentate; terminal claws without any denticles at the base. Ehippium with only a single egg-ampulla and very coarsely sculptured, surface partly tubercular.

Male much smaller than female and exhibiting the usual sexual characters, head somewhat less produced than in other species.

Colour.—Body in both sexes highly pellucid, with a more or less distinct bluish tinge; ehippial ovum brick-red.

Length of adult female about 1 mm, of male 0.68 mm.

Remarks.—This form looks rather like the European species *M. rectirostris*, Zaddach, having a much similar shape of the head. It is, however, at once distinguished both from this and all other known species by the unusually short antennulæ of the female, a character which has given rise to the specific name here proposed. Moreover the terminal claws of the caudal part is devoid of any denticles at the base, in which respect this form also differs from the nearly-allied Sumatrense species, *M. Weberi*, Richard.

Occurrence and Habits.—In one of my aquaria prepared with mud from China this *Moina* appeared at first only in some few specimens, which, however, rapidly

multiplied in the usual parthenogenetic manner until the close of the season, when the sexual propagation took place, the females becoming at that time provided with ephippia and males specimens appearing. In habits this form exactly agreed with the other species of the genus, the specimens being rather agile and keeping themselves constantly suspended in the water, through which they moved in a jerking manner, the head generally turned upwards.

7. *Moinodaphnia Macleayi* (King).

Occurrence.—Several specimens of this form were picked up from the sample taken by Mr. *Iversen* at the Helvetic Estate, Sumatra. It did not, however, appear in any of my aquaria.

Distribution.—Australia (*King*), Ceylon (*Brady*), Brazil (the present author).

FAM. BOSMINIDÆ.

8. *Bosmina cornuta* (Jurine).

Occurrence.—Two small, but adult ovigerous females of this form were secured from one of my aquaria prepared with mud from China.

Distribution.—Europe, Central Asia.

FAM. MACROTHRICIDÆ.

9. *Macrothrix laticornis* (Jurine).

Occurrence.—This form also easily recognizable by the minutely jagged dorsal margin of the carapace, appeared in some of my aquaria prepared with mud from China.

Distribution.—Europe.

10. *Macrothrix spinosa*, King.

Occurrence.—This form, previously raised by the present author from Australian mud, developed in considerable numbers in the aquaria prepared with mud from Sumatra. It was also found not unfrequently in the sample taken by Mr. *Iversen*.

Distribution.—Australia.

11. *Ilyocryptus sordidus* (Lièvin).

Occurrence.—At the bottom of some of my aquaria prepared with mud from China an *Ilyocryptus* of a dark blood-red colour was found, dragging itself slowly through the bottom-deposit, and never making even the slightest attempt to swim. On a closer examination of the specimens, I am unable to distinguish this form from the European species first described by Lièvin as *Acanthocercus sordidus*.

Distribution.—Europe, Australia, Brazil.

12. *Ilyocryptus longiremis*, G. O. Sars.

Occurrence.—This form, first described by the present author from Australia, developed rather abundantly in the aquaria prepared with mud from Sumatra, and was also found not unfrequently in the sample taken by Mr. *Iversen*.

Distribution.—Australia, Brazil.

FAM. CHYDORIDÆ.

13. *Chydorus sphaericus* (Müller).

Occurrence.—Found both in the aquaria prepared with mud from China and Sumatra, as also in the sample from the last-mentioned country.

Distribution.—Almost all the world.

14. *Leydigia propinqva*, G. O. Sars, n. sp.

(Pl. I, figs. 4, 4 a).

Leydigia acanthocercoides, G. O. Sars. 'On some South African Entomostraca raised from dried mud.' Chr. Vid. Selsk. Forh. 1895, p. 18, Pl. 4, figs. 1—4 (not Fischer).

Remarks.—Having now, through the kindness of Prof. *Lilljeborg*, had an opportunity of examining Swedish specimens of the true *L. acanthocercoides* Fischer, I find that the South African form described by me under this name is in reality specifically distinct, for which reason I propose for it the above name. It differs not only in the shape and sculpture of the carapace, but also in the much smaller size of the ocellus, which scarcely exceeds that of the eye, whereas in *L. acanthocercoides* it is considerably larger. Moreover the caudal part is somewhat less broad, and the terminal claws have each at the base a very small denticle, omitted in my previous figure.

Occurrence.—Two well preserved female specimens, exactly agreeing with the South African form, were found in the sample taken in Sumatra by Mr. *Iversen*. To show the identity, I give on the accompanying plate an habitus-figure (side-view) of one of the specimens and a somewhat more strongly magnified figure of the caudal part from the same individual.

Distribution.—Knysna (Cape Colony).

15. *Alona tenuicaudis*, G. O. Sars.

Occurrence.—This form developed in several of my aquaria prepared with mud from Sumatra.

Distribution.—Europe, Central Asia, Algeria.

16. *Alona costata*, G. O. Sars.

Occurrence.—Found in some of my aquaria prepared with mud from China.

Distribution.—Europe, Central Asia.

17. *Alona guttata*, G. O. Sars.

Occurrence.—Specimens of both the tuberculated and smooth varieties occurred not unfrequently in the aquaria prepared with mud from Sumatra.

Distribution.—Europe, Central Asia, Algeria, Brazil.

18. *Alona acuticostata*, G. O. Sars, n. sp.

(Pl. I, figs. 5, 5 a—c).

Specific Characters.—Female. Carapace, seen laterally, oval quadrangular in form, greatest height in the middle, dorsal margin forming quite an even curve as far as the tip of the rostrum and terminating behind in an obtuse corner, ventral nearly straight, or very slightly prominent in front of the middle, hind edges somewhat curved below. Head rather procumbent, rostral projection of moderate size. Surface of shell very coarsely striated longitudinally, striæ rather prominent, ridge-like, about 15 on each side, lower edges of valves minutely setiferous, and each exhibiting at the posterior corner a small denticle. Ocellus smaller than the eye, and somewhat nearer to it than to the tip of the rostrum. Lip-plate of the usual shape. Caudal part comparatively small, not expanded distally, supra-anal angle rather slight and occurring somewhat above the middle, lower corner obtusely rounded, denticles of the marginal rows rather small, about 10 on each side, those of the lateral rows extremely delicate, terminal claws rather strong, each with an unusually long denticle at the base.

Male much smaller than female, and having the dorsal face less vaulted. Caudal part gradually tapered distally, with the supra-anal angle obsolete and the terminal claws much reduced in size.

Colour.—Body pellucid, with a faint yellowish tinge.

Length of adult female 0.36 mm, of male 0.28 mm.

Remarks.—This new species is chiefly characterised by the very coarse, ridge-like longitudinal striæ of the carapace, which are more prominent than in any other species known to me. Otherwise it comes very near to *A. rectangula* G. O. Sars and some other species grouping themselves around this form.

Occurrence.—Raised in considerable number in some of my aquaria prepared with mud from Sumatra.

19. *Pseudolona longirostris* (Daday).

Occurrence.—Some few specimens of this form were picked up from the sample taken by Mr. *Iversen* at the Helvetic Estate, Sumatra.

Distribution.—Ceylon (*Daday*), Brazil (the present author).

COPEPODA.

FAM. DIAPTOMIDÆ.

1. *Diaptomus orientalis*, Brady.

Occurrence.—Some few specimens of this form, exactly agreeing with those raised by the present author from Australian mud, developed in one of my aquaria prepared

with mud from Sumatra. It was also found occasionally in the sample taken by Mr. *Iversen*.

Distribution.—Ceylon, Australia.

2. *Diaptomus Chaffanjon*, Richard.

(Pl. II, figs. 1, 1 a—g).

Diaptomus Chaffanjon, Richard, « Sur deux Entomostracés d'eau douce recueillies par M. *Chaffanjon* en Mongolie. » Bull. d. Mus. d'hist. nat. 1887, p. 131.

Specific Characters.—Female. Form of body rather slender, with the anterior division, seen dorsally, oblong fusiform in shape, greatest width about in the middle, anterior extremity gradually narrowed, posterior but slightly attenuated. Cephalosome with a slight cervical depression, frontal appendages comparatively small and widely apart. Penultimate segment of metasome confluent with the last one, and exhibiting dorsally in the middle a very conspicuous spiniform protuberance pointing obliquely behind; lateral lobes of last segment of moderate size, bifurcate, and somewhat asymmetrical, left lobe the larger. Urosome rather robust, with the genital segment comparatively large and broad, forming on each side anteriorly an obtuse protuberance tipped with a short denticle, left protuberance the more prominent. Distal part of urosome very movably articulated to the genital segment and generally turned out of the axis of the body to left side, its 2 segments imperfectly defined. Caudal rami of moderate size and obliquely truncated at the tip, setæ normal. Anterior antennæ rather slender, reaching, when reflexed, to the base of the caudal rami. Last pair of legs with a well-marked denticiform lobe on the hind face of 1st basal joint, unguiform

projection of outer ramus denticulated on both edges, terminal joint extremely small, knob-like, with the inner apical spine well developed, outer rudimentary; inner ramus very short, not even extending to the middle of the 1st joint of the outer. Ovisac very large, cordiform.

Male, as usual, more slender than female, and entirely wanting the dorsal projection of the penultimate segment of metasome, lateral lobes of last segment very small, urosome slender, 5 articulate. Right anterior antenna with the middle section rather much tumefied, and carrying anteriorly coarse spines on its 3 first joints; antepenultimate joint of terminal section forming at the end anteriorly a slight expansion fringed with coarse denticles in a pectinate manner. Last pair of legs rather largely developed, 2nd basal joint exhibiting inside on right leg a small rounded lamella, on left leg a still smaller dentiform projection, penultimate joint of right leg produced outside to a quite short spiniform projection, last joint large, klub-shaped, with the outer spine very short and occurring beyond the middle, apical claw but slightly curved; inner ramus of this leg very small. Left leg scarcely extending beyond the penultimate joint of the right, terminal joint produced at the tip to an obtuse digitiform process finely serrated inside, and having at its base a small setiform appendage; inner ramus somewhat longer than that of right leg, and acuminate at the tip.

Colour.—Body pellucid, with a faint greenish tinge.

Length of adult female 1.85 mm, of male about the same.

Remarks.—This form was described by Dr. *Richard* in the above-quoted paper from preserved specimens, and some detail-figures were added to the description. No habitus-figures have, however, hitherto been given, nor has this

form been observed by any other zoologists. It is a very distinct species, being especially highly distinguished by the peculiar spiniform dorsal protuberance of the penultimate segment of the metasome in the female.

Occurrence.—Some specimens of this form developed in one of my aquaria prepared with mud from China, and were watched for several time. They were extremely rapid in their movements, so as only with great difficulty to be caught by the ordinary implements.

Distribution.—Mongolia (*Richard*).

FAM. CYCLOPIDÆ.

3. *Cyclops Leuckarti*, Claus.

Occurrence.—This form occurred rather abundantly in the sample taken by Mr. *Iversen* at the Helvetic Estate, Sumatra. I have carefully compared it with Norwegian specimens and can find no difference whatever.

Distribution.—Europe, Central Asia, Ceylon, Algeria, Australia, North America.

4. *Cyclops hyalinus*, Rehberg.

Remarks.—Dr. *Schmeil* regards this form as only a variety of *C. oithonoides* G. O. Sars. In this view I am by no means prepared to consent. It seems to me to be in reality a well defined species.

Occurrence.—Found together with the preceding species, but not nearly in such numbers.

Distribution.—Europe, Cape of Good Hope (coll. of Dr. *Purcell*).

6. *Cyclops affinis*, G. O. Sars.

Occurrence.—Several specimens of this form developed in the aquaria prepared with mud from China. This is the first instance of a *Cyclops* being raised from dried material.

Distribution.—Europe, Australia.

OSTRACODA.

FAM. CYPRIDIDÆ.

1. *Cypris purpurascens*, Baird.

(Pl. II, figs. 2, 2 a—d).

Cypris purpurascens, Baird, 'Description of some new recent Entomostraca from Nagpur'. Proceed. Zool. Soc. London 1859.

Specific Characters.—Female. Shell moderately tumid, seen laterally, oblong oval in form, greatest height scarcely attaining half the length and occurring a little in front of the middle, dorsal margin somewhat angularly curved, ventral with a very slight sinus in front of the middle, anterior extremity broader than posterior, both evenly rounded at the tip;—seen dorsally, oblong fusiform in outline, greatest width about in the middle and equalling half the length, both extremities obtusely acuminate. Valves somewhat unequal, the left one overlapping the right along the anterior extremity by a hyaline rim, surface smooth, with scattered delicate hairs at each extremity. Immature specimens having, as usual, the anterior part of the shell considerably higher than the posterior, and moreover dis-

tinguished by a very conspicuous spiniform process issuing from each valve in about the middle of the posterior edge and pointing straight behind. Natatory setæ of inferior antennæ extending somewhat beyond the terminal claws. Caudal rami narrow and elongated, slightly curved in their distal part, and very finely ciliated along the dorsal margin, outer apical claw not attaining half the length of the ramus, inner considerably shorter, apical seta very slender, dorsal seta small and occurring near to the inner claw.

Colour.—Shell semipellucid, with a fine violaceous tinge, and variegated with irregular dark bluish patches, each valve exhibiting along the free edge a narrow stripe of same colour.

Length of shell 1.03 mm, height 0.57 mm, width 0.52 mm.

Remarks.—I think I am right in identifying the above described form with that briefly recorded by *Baird* under the above name. As shown by the structure of the several appendages, it undoubtedly ought to be referred to the genus *Cypris* (sensu strictiore), exhibiting, as it does, the characteristic slender and narrow form of the caudal rami and of the digitiform lobes of the anterior maxillæ. It may be easily recognized from the other species by the peculiar colouring of the shell, well indicated by the specific name proposed by *Baird*.

Occurrence and Habits.—This beautiful form developed rather abundantly in some of my aquaria prepared with mud from Sumatra, and was watched during 2 successive seasons. In habits it agrees with the other species of the genus, being enabled to swim rather quickly through the water by the aid of the antennæ, both pairs of which are provided with well-developed natatory setæ. The pro-

pagation, as could be stated by 2 years continued investigation, is exclusively parthenogenetical, and this is probably also the case with all other species of the true genus *Cypris*.

Distribution.—India (*Baird*).

2. *Cypris vittata*, G. O. Sars, n. sp.

(Pl. II, figs. 3, 3 a—c).

Specific Characters.—Female. Shell shorter and more tumid than in the preceding species, seen laterally, oval in form, greatest height about equalling $\frac{3}{5}$ of the length, and occurring somewhat in front of the middle, dorsal margin well arched, ventral scarcely at all sinuated, both extremities nearly equal and evenly rounded at the tip:—seen dorsally, oblong oval, greatest width somewhat exceeding half the length, both extremities obtusely acuminate;—end-view remarkably oblique, left valve having its greatest convexity at a much lower level than right, which latter, as in the preceding species, is overlapped by the left along the anterior extremity by a hyaline rim. Surface of shell smooth and rather densely hairy at both extremities. Caudal rami resembling in structure those in the preceeding species, though somewhat more curved in their distal part.

Colour.—Shell semipellucid, with a slight greenish tinge, and provided on each side with 4 successive dark patches, forming as many interrupted transverse bands.

Length of shell 0.86 mm, height 0.51 mm, width 0.50 mm.

Remarks.—This new species is at once distinguished from the preceding one by the shorter and more tumid shell, as also somewhat in colour. It is also rather inferior in size, and moreover exhibits a remarkably oblique end-

view (see fig. 3 b), much as in the European species *Cypris obliqua* Brady.

Occurrence.—Several specimens of this form, all of the female sex, developed in one of my aquaria prepared with mud from China.

3. *Cypris decorata*, G. O. Sars, n. sp.

(Pl. II, figs. 4, 4 a--b).

Specific Characters.—Female. Shell rather tumid, seen laterally, oval triangular in form, greatest height scarcely attaining $\frac{3}{5}$ of the length and occurring in front of the middle, dorsal margin angularly curved in front, ventral almost straight in the middle, both extremities somewhat obliquely truncated below and narrowly rounded at the tip, the anterior one the broader;—seen dorsally, broadly oval in form, greatest width about equalling $\frac{2}{3}$ of the length, both extremities blunted;—end-view normal. Valves slightly unequal, the left one overlapping the right along the lower part of the anterior extremity by an hyaline rime; surface smooth and finely hairy at both extremities. Caudal rami very narrow, sublinear, outer apical claw about half the length of the ramus and nearly straight, inner scarcely more than half as long.

Colour.—Shell semipellucid, with a faint yellowish green tinge, and ornamented with a number of irregular angular patches of a very dark colour, not forming any distinct transversal bands.

Length of shell 0.70 mm, height 0.40 mm, width 0.44 mm.

Remarks.—This species is nearly allied to the preceding one, differing, however, somewhat in the shape of the shell, as also in the greater number and more irregular

arrangement of the dark patches, with which it is ornamented. It is also rather inferior in size.

Occurrence.—Found in the same aquaria, in which *C. vittata* developed.

Gen. **Hemicypris**, G. O. Sars, n.

Generic Characters.—Shell rounded or oval in form, moderately tumid, somewhat resembling that in the genus *Cyprinotus*. Right valve, however, the larger and overlapping the left to a more or less extent. Free edges of left valve minutely tubercular throughout. Eye comparatively large. Natatory setæ of inferior antennæ well developed, reaching beyond the apical claws. Masticatory lobes of 1st pair of maxillæ very short, palp robust, with the distal joint quadrate in form, and armed at the tip with 5 comparatively short and curved claw-like spines. Second pair of maxillæ without any trace of a vibratory plate. Caudal rami comparatively small, sublinear in form, seta of dorsal edge longer than the apical one. Propagation exclusively parthenogenetical.

Remarks.—This new genus, it is true, in some respects recalls that of *Cyprinotus* Brady. On a closer comparison, however, it is found to differ very essentially in the fact, that the inequality of the valves is entirely the reverse of that characteristic of the said genus. Moreover the 2nd pair of maxillæ are devoid of the vibratory plate present in most other *Cyprididæ*. Another distinguishing character, as compared with *Cyprinotus*, is the exclusively parthenogenetical propagation, no males existing at all, whereas in the species of *Cyprinotus* males are almost as frequent as

females. Three different species of the present genus have been reared in my aquaria, one of which has been previously observed.

4. *Hemicypris pyxidata* (Moniez).

(Pl. III, figs. 1, 1 a—f).

Cyprinotus pyxidatus, Moniez, « Entomostracés d'eau douce de Sumatra et de Celebes. » II. *Ostracoda*, p. 134, Pl. X, figs. 23—27.

Specific Characters.—Female. Shell somewhat compressed, seen laterally, rounded oval in form, greatest height exceeding $\frac{2}{3}$ of the length and occurring in the middle, dorsal margin boldly arched, ventral convex in the middle, both extremities evenly rounded; the anterior one slightly broader than the posterior;—seen dorsally, oblong oval in form, greatest width not attaining half the length and occurring behind the middle, anterior extremity attenuated and acuminate at the tip, posterior more obtuse. Valves very unequal, the right one much the larger and overlapping the left nearly along the whole circumference; surface conspicuously dotted or areolated and rather densely hairy, especially at both extremities. Eye of moderate size. Caudal rami very small, slightly attenuated distally, outer apical claw exceeding half the length of the ramus, dorsal seta more than twice the length of the apical one and occurring at some distance from the claws.

Colour.—Shell rather opaque, of a dark yellow colour, with 3 successive chestnut-brown patches on each side.

Length of shell 1.02 mm, height 0.70 mm, width 0.52 mm.

Remarks.—This form was first described and figured, though in a somewhat imperfect manner, by Prof. Moniez

from preserved specimens, and was erroneously referred to the genus *Cyprinotus*, the author having apparently not been aware of the inverse structure of the valves. It is an easily recognizable species, being distinguished by the unusually short and high, almost orbicular shell and the great unequalness of the valves.

Occurrence and Habits.—In some of my aquaria prepared with mud from Sumatra this form developed rather plentifully, and was watched during 2 successive seasons. The individuals were rather agile, swimming about rather quickly, now and then affixing themselves to the walls of the aquarium or to the plants growing in it. All the specimens were of the female sex. This form was also found occasionally in the sample taken by Mr. *Iversen*.

Distribution.—Celebes (*Moniez*).

5. *Hemicypris ovata*, G. O. Sars, n. sp.

(Pl. III, figs. 2, 2 a—b).

Specific Characters.—Female. Shell, seen laterally, oval in form, greatest height not attaining $\frac{3}{5}$ of the length and occurring about in the middle, dorsal margin but slightly arched, ventral almost straight, anterior extremity evenly rounded, posterior obtusely truncated and somewhat broader; seen dorsally, oblong ovate in form, greatest width slightly exceeding half the length and occurring behind the middle, anterior extremity gradually tapered and acuminate at the tip, posterior blunted. Valves rather unequal, the right one overlapping the left considerably along the anterior extremity, as also somewhat behind and below; surface smooth and slightly hairy at both extremities. Eye very conspic-

uous. Caudal rami of a similar structure to that in the preceding species, though a little larger.

Colour.—Shell semipellucid, with a yellowish tinge, and without any true pigmentary patches, though exhibiting in the middle a dark shadow caused by the translucent anterior dilatation of the intestine; coecal appendages likewise very conspicuous and dark-coloured.

Length of the shell 1.03 mm, height 0.58 mm, width 0.50 mm.

Remarks.—This species is at once distinguished from the preceding one by the rather different shape of the shell. It is, however, evidently congeneric with it, exhibiting the same characteristic structure of the valves and of the several appendages.

Occurrence.—This form also developed rather abundantly in some of my aquaria prepared with mud from Sumatra, and was likewise found not unfrequently in the sample taken by Mr. *Iversen*. As with the preceding species, only female specimens occurred.

6. *Hemicypris megalops*, G. O. Sars, n. sp.

(Pl. III, figs. 3, 3 a—b).

Specific Characters.—Female. Shell comparatively shorter and higher than in *H. ovata*, seen laterally, regularly oval in form, greatest height about equalling $\frac{3}{5}$ of the length and occurring in the middle, dorsal margin evenly arched, ventral nearly straight, anterior extremity obliquely rounded, posterior somewhat broader and obtusely truncated;—seen dorsally, ovate in form, greatest width exceeding half the length, anterior extremity more attenuated than posterior. Valves less unequal than in the 2 preceding species, right

valve, however, slightly overlapping the left along the anterior extremity and the lower part of the posterior, free edge of left valve, as in the 2 preceding species, minutely tubercular; surface smooth and finely hairy at both extremities. Eye of quite unusual size and highly refractive, occurring more in front than in the 2 preceding species. Caudal rami comparatively narrower than in *H. ovata*; otherwise of a very similar structure.

Colour.—Shell semipellucid, of a fine straw-colour, and exhibiting near the dorsal face 2 irregular, somewhat band-like patches of a light chest-nut hue, centre of shell bluish green on account of the translucent anterior dilatation of the intestine; coecal appendage of same colour.

Length of shell 0.86 mm, height 0.54 mm, width 0.48 mm.

Remarks.—This species is closely allied to *H. ovata*, but of smaller size, and having the shell comparatively shorter and more regularly oval in form. It is also easily distinguished by the colouring of the shell and by the unusually large size of the eye, a character which has given rise to the specific name here proposed.

Occurrence.—Some specimens of this form were found in the same aquaria in which the 2 preceding species developed. It did not, however, occur in the sample taken by Mr. *Iversen*.

Gen. **Leptocypris**, G. O. Sars, n.

Generic Characters.—Shell very thin and highly compressed, oblong in form, with the valves subequal; surface closely striated longitudinally, inner duplicatures very narrow. Eye comparatively small. Natatory setæ of inferior

antennæ well-developed, extending to the tip of the terminal claws. Masticatory lobes and palp of 1st pair of maxillæ narrow linear in form; 2nd pair of maxillæ with a well-developed vibratory plate. Caudal rami exceedingly large and powerful, dorsal edge divided into a limited number of coarse serrations, apical claws very strong and coarsely dentated along the concave edge, apical seta slender, that of the dorsal edge very small.

Remarks.—This new genus is chiefly characterised by the very delicate structure of the valves, and by the unusual development of the caudal rami. It contains at yet only a single species, to be described below.

7. *Leptocypris papyracea*, G. O. Sars, n. sp.

(Pl. III, figs. 4, 4 a—c).

Specific Characters.—Female. Shell very much compressed, seen laterally, oblong in form, greatest height scarcely attaining half the length and occurring about in the middle, dorsal margin evenly arched, ventral distinctly sinuated in front of the middle, anterior extremity bluntly rounded, posterior somewhat narrower and transversely truncated;—seen dorsally, narrow fusiform, greatest width scarcely exceeding $\frac{1}{4}$ of the length, both extremities acuminate. Valves perfectly equal very thin and pellucid, surface densely striolate and provided at each extremity with scattered hairs; muscular impressions far in front of the middle. Eye somewhat remote from the dorsal face, pigment light yellowish. Caudal rami equalling in length half the shell and highly chitinized, almost straight, dorsal edge divided into 6 to 7 strong serrations, outer apical claw not attaining half the

length of the ramus, apical seta very slender, almost reaching to the tip of the claw, seta of dorsal edge scarcely $\frac{1}{3}$ as long.

Colour.—Shell highly pellucid, with a slight yellowish tinge.

Length of shell 1.84^{mm}, height 0.90^{mm}, width 0.42^{mm}.

Remarks.—This is a very distinct and easily recognizable form, which cannot properly be confounded with any other known *Ostracod*, though in the sculpturing of the shell it somewhat recalls certain species of the otherwise very different genus *Ilyodromus* G. O. Sars.

Occurrence and Habits.—Some few specimens of this peculiar form, all of the female sex, developed in one of my aquaria prepared with mud from Sumatra, and were watched for some time. The specimens were not particularly agile, though at times they moved quite freely through the water in the usual manner, a case never found in any of the species of the genus *Ilyodromus*, all of which are quite devoid of swimming power. More frequently, however, the specimens were seen creeping slowly up the walls of the aquarium or along the aquatic plants growing in it. When disturbed, they started away in a most abrupt manner, the body being propelled by an energetic extension of the powerful and very movable caudal rami.

8. *Notodromas oculata*, G. O. Sars. n. sp.

(Pl. IV, figs. 1, 1 a—c).

Specific Characters.—Female. Shell moderately tumid, seen laterally, rounded oval in form, greatest height somewhat exceeding $\frac{2}{3}$ of the length and occurring in the middle, dorsal margin considerably arched, ventral almost

straight, anterior extremity broadly rounded and angular below, posterior somewhat narrower and blunted at the tip;—seen dorsally, ovate in form, greatest width somewhat exceeding half the length and occurring behind the middle, anterior extremity more attenuated than posterior. Valves perfectly equal, each with a broad hyaline rim in front, both without any trace of the denticle at the infero-posteal corner present in *N. monacha*, lower edges abruptly inflexed in front, so as to form together a flattened lozeng-shaped ventral area; surface smooth and shining, with scattered hairs at each extremity. Eye exceedingly large and conspicuous, consisting of a large distinctly bilobed pigmentary mass carrying on each side a highly refractive lens. Caudal rami of moderate size, slightly tapering distally, apical claws very slender and minutely denticulate, the outer one equalling about $\frac{2}{3}$ of the length of the ramus, seta of dorsal edge well developed, apical one obsolete.

Colour.—Shell semipellucid, of a whitish colour, with a very dark shadow on each side below the muscular impressions, expanding in front to a large patch, behind to a narrow band-like stripe.

Length of shell 0.59 mm, height 0.42 mm, width 0.32 mm.

Remarks.—This form differs conspicuously from the European species, *N. monacha* (Müll.), by the absolute absence of the dentiform projection of the valves at the infero-posteal corner, as also by the extraordinary development of the eye. Nor can it properly be referred to the Ceylon species described by Dr. *Daday* as *N. Entzii*, differing, as it does, both in the shape and colour of the shell. It is also much inferior in size to any of the 2 above-mentioned species.

Occurrence.—Some few specimens of this form developed in one of my aquaria prepared with mud from Sumatra, 2 of which were secured for further examination. They were both of the female sex and apparently fully grown, to judge from the well developed ovarian tubes.

9. *Cypria crenulata*, G. O. Sars, n. sp.

(Pl. IV, figs. 2, 2 a—b).

Specific Characters.—Female. Shell much compressed, seen laterally, rounded oval in form, greatest height about equalling $\frac{2}{3}$ of the length and occurring behind the middle, dorsal margin well arched and sloping gently in front, more abruptly behind, ventral somewhat convex in the middle, anterior extremity narrowly rounded and somewhat deflexed, posterior much broader and bluntly truncated;—seen dorsally, narrow oblong, greatest width not attaining half the length, anterior extremity narrower than posterior. Valves rather unequal, left one overlapping the right both in front and behind, as also somewhat ventrally, whereas it is overlapped by the right for some extent dorsally, anterior edge of right valve minutely tubercular; surface smooth, clothed at each extremity by scattered delicate hairs. Eye very large and conspicuous. Caudal rami slightly arcuate and gradually tapering distally, apical claws comparatively short, but rather strong and slightly curved, the outer one not attaining half the length of the ramus, seta of dorsal edge rather slender and recurved, occurring about in the middle, apical seta very small.

Colour.—Shell rather pellucid, of a light yellowish hue, without any pigmentary dots.

Length of shell 0.57 mm, height 0.39 mm, width 0.26 mm.

Remarks.—The above-described form unquestionably belongs to the genus *Cypria* of Zencker, and is chiefly distinguished from the other known species of this genus by the distinctly tuberculated anterior edge of the right valve and by the want of any pigmentary dots on the shell.

Occurrence.—Some few specimens of this form were picked up from the sample taken by Mr. *Iversen* at the Helvetic Estate, Sumatra. Among them was also a male specimen easily recognizable as such by the large translucent ejaculatory apparatus, but exactly agreeing with the female in the shape of the shell.

10. *Pionocypris turgida*, G. O. Sars.

Occurrence.—This form developed rather abundantly both in the aquaria prepared with mud from Sumatra and in those prepared with mud from China.

Distribution.—New Zealand, Australia, Madagascar.

11. *Cypridopsis vidua* (Müller).

Occurrence.—In one of my aquaria prepared with mud from China, a *Cypridopsis*, undistinguishable from the common European species, was found in considerable numbers.

Distribution.—Europe, North America.

12. *Cypridopsis exigua*, G. O. Sars, n. sp.

(Pl. IV, figs. 3, 3 a—b).

Specific Characters.—Female. Shell very tumid, seen laterally, rounded triangular in form, greatest height considerably exceeding $\frac{2}{3}$ of the length and occurring in

the middle, dorsal margin gibbously arched, ventral but very slightly sinuated, both extremities obliquely rounded and nearly equal;—seen dorsally, almost globular in form, greatest width considerably exceeding the height, both extremities obtuse. Valves but slightly unequal, smooth, with only small and scattered hairs at each extremity. Caudal rami exhibiting the rudimentary structure characteristic of the genus.

Colour.—Shell of a light yellowish green colour, with a number of comparatively small dark patches, partly forming on each side 3 interrupted transversal bands.

Length of shell 0.46 mm , height 0.33 mm , width 0.35 mm .

Remarks.—This form at the first sight somewhat resembles the Australian species *Pionocypris globulus* G. O. Sars. It is, however, a true *Cypridopsis*, as shown by the structure of the caudal rami.

Occurrence.—Several specimens of this form were found in one of my aquaria prepared with mud from Sumatra. It was also found occasionally in the sample taken by Mr. Iversen.

13. *Cypridopsis adusta*, G. O. Sars, n. sp.

(Pl. IV, figs. 4, 4 a—b).

Specific Characters.—Female. Shell rather tumid, seen laterally, oval triangular in form, greatest height somewhat exceeding $\frac{3}{5}$ of the length and occurring about in the middle, dorsal margin well arched, ventral nearly straight, anterior extremity obliquely rounded, posterior somewhat narrower and obtuse at the tip;—seen dorsally, broadly ovate in form, greatest width about equalling the height,

anterior extremity somewhat narrower than posterior. Valves but slightly unequal, smooth and rather densely hairy at both extremities. Caudal rami of the usual structure.

Colour.—Shell of a light yellowish colour, with a number of dark brown or purplish patches not arranged in distinct transversal bands, each extremity tinged with reddish brown.

Length of shell 0.63 mm, height 0.39 mm, width 0.40 mm.

Remarks.—This form is at once distinguished from any of the other known species of this genus by the peculiar and beautiful colour of the shell. It is also of rather large size, as compared with the other species.

Occurrence.—Numerous specimens of this beautiful species, all of the female sex, developed in some of my aquaria prepared with mud from Sumatra.

14. *Cypridopsis dubia*, G. O. Sars, n. sp.

(Pl. IV, figs. 5, 5 a—b).

Specific Characters.—Female. Shell less tumid than usual, seen laterally, oval in form, greatest height scarcely exceeding $\frac{2}{5}$ of the length and occurring in the middle, dorsal margin quite evenly arched, ventral almost straight, anterior extremity obliquely rounded, posterior somewhat broader and obtuse at the tip;—seen dorsally, oblong oval in form, greatest width but slightly exceeding half the length, anterior extremity somewhat narrower than posterior. Valves slightly unequal, the right one overlapping the left along the anterior extremity by a hyaline rim; surface smooth, with scattered hairs at each extremity. Caudal rami very small, exhibiting the structure characteristic of the genus.

Colour.—Shell rather pellucid, of an uniform pale yellowish hue, without any pigmentary patches.

Length of shell 0.46 mm, height 0.28 mm, width 0.26 mm.

Remarks.—In the shape of the shell and its absolute want of any pigmentary patches, this form conspicuously differs from the other known species of the genus, and, indeed, at first I was more inclined to refer it to the genus *Cyclocypris*. On a closer examination, however, the caudal rami were found to exhibit the rudimentary structure characteristic of the genera *Cypridopsis* and *Cypridopsella*. It still remains somewhat doubtful, to which of these 2 genera it should properly be referred.

Occurrence.—Only some few female specimens of this dwarfed form have come to my notice. They were found in one of my aquaria prepared with mud from Sumatra.

15. *Dolerocypris fasciata* (Müller).

(Pl. IV, figs. 6, 6 a).

Remarks.—I fully agree with Dr. *Kaufmann*, that this characteristic form, which I formerly referred to the genus *Stenocypris*, ought more properly to be considered as the type of a separate genus. The correctness of such a view becomes now still more evident by the discovery of another nearly-allied species, to be described in the sequel. For comparison with this species, and to show the identity of the Sumatrense form with the European species, I give on the accompanying plate an habitus-figure (lateral view) of one of the specimens reared in my aquaria, together with a more highly magnified figure of one of the caudal rami.

Occurrence.—This form developed very abundantly in the greater number of my aquaria prepared with mud from Sumatra. All the specimens were of the female sex and exhibited across the back the characteristic dark transverse band, from which the specific name has been derived.

Distribution.—Europe.

16. *Dolerocypris sinensis*, G. O. Sars, n. sp.

(Pl. IV, figs. 7, 7 a—b).

Specific Characters.—Female. Shell, seen laterally, narrow oblong in form, greatest height scarcely exceeding $\frac{1}{3}$ of the length and occurring somewhat behind the middle, dorsal margin but slightly arched, nearly straight in the middle, ventral evenly concaved, anterior extremity obliquely rounded, posterior not much attenuated and obtuse at the tip;—seen dorsally, narrow fusiform in outline, greatest width about equalling $\frac{1}{4}$ of the length, both extremities acuminate. Valves slightly unequal, the right one overlapping the left somewhat both in front and behind; inner duplicatures comparatively narrower than in *D. fasciata*; surface smooth, with scattered hairs at each extremity. Caudal rami rather strong, almost straight, and slightly attenuated distally, apical claws coarsely dentate, the outer one almost twice the length of the inner, and equalling half the length of the ramus, seta of dorsal edge very small, and occurring close to the base of the inner claw, apical seta about half the length of the outer claw.

Colour.—Shell of an uniform light greenish colour, without any distinct dark band across the back.

Length of shell 1.93 mm, height 0.66 mm, width 0.50 mm.

Remarks.—This form is closely allied to *D. fasciata*, and undoubtedly belongs to the same genus. It is, however, at once distinguished by the absolute absence of the dark transverse band across the back so characteristic of *D. fasciata*. On a closer comparison also the shape of the shell is found to be somewhat different, the posterior extremity being far less tapered. It moreover reaches to a considerably larger size than does *D. fasciata*.

Occurrence.—I have only had the opportunity of examining a solitary specimen of this form, which was found in one of my aquaria prepared with mud from China.

17. *Ilyocypris dentifera*, G. O. Sars, n. sp.

(Pl. IV, figs. 8, 8 a—c).

Specific Characters.—Female. Shell rather compressed, seen laterally, oval quadrangular in form, greatest height somewhat exceeding half the length and occurring quite in front, dorsal margin straight, forming above the eye an angular bend, ventral deeply sinuated, both extremities obtusely truncated, the anterior one considerably broader than the posterior;—seen dorsally, narrow oblong in form, somewhat constricted in front of the middle and slightly dilated behind, anterior extremity acuminate, posterior more obtuse. Valves subequal, each exhibiting behind a thin hyaline rim, inside which a series of about 12 strong, posteriorly-pointing denticles occurs, anterior edge very minutely spinulose throughout; surface of shell coarsely granular or minutely areolated, and clothed on each extremity with scattered hairs. Eye rather small and distant from the dorsal margin. Caudal rami comparatively small and

but slightly curved, apical claws subequal, seta of dorsal edge well developed, and occurring at some distance from the claws, apical seta small.

Male considerably smaller than female, and having the posterior part of the shell more dilated.

Colour.—Shell rather opaque, of a whitish colour, sometimes tinged with light reddish brown.

Length of shell in female 0.90 mm, height 0.50 mm, width 0.34 mm.

Remarks.—This form is nearly allied to the Australian species, *I. australiensis* G. O. Sars, differing, however, in the strong armature of the posterior part of the shell.

Occurrence.—Numerous specimens of this form developed in some of my aquaria prepared with mud from China.

18. *Ilyocypris angulata*, G. O. Sars, n. sp.

(Pl. IV, figs. 9, 9 a).

Specific Characters.—Female. Very like the preceding species, but of somewhat larger size, and with the surface of the shell very uneven, projecting on each side to several nodular protuberances, one of which, occurring behind the middle, is remarkably large and angular in form. Both the anterior and posterior edges of the valves, as also the adjacent part of the shell, armed with strong denticles, each tipped with a stiff bristle.

Colour.—Shell semipellucid, of a whitish colour, with greenish translucent intestine.

Length of shell 0.98 mm, height 0.50 mm, width 0.48 mm.

Remarks.—This form may perhaps more properly be regarded as only a variety of the preceding species. I have, however, not seen any distinct transition between the two.

Occurrence.—Some few specimens of this form, all of the female sex, were found together with the preceding one.

19. *Candonopsis tenuis*, Brady.

Occurrence.—Found occasionally in the sample taken by Mr. *Iversen* at the Helvetic Estate, Sumatra.

Distribution.—Australia.

EXPLANATION OF THE PLATES.

Pl. I.

Limnadia lenticularis (Lin.).

- Fig. 1. Adult ovigerous female, viewed from left side; magnified 12 diameters.
— 1 a. Same, caudal part, more highly magnified.

Scapholeberis Kingi, G. O. Sars.

- Fig. 2. Adult gravid female, viewed from left side; magnified 98 diameters.
— 2 a. Same, dorsal view.
— 2 b. Same, caudal part, more highly magnified.

Moina brevicornis,⁹G. O. Sars.

- Fig. 3. Adult ephippial female, viewed from right side; magnified 64 diameters.
— 3 a. Same, dorsal view.
— 3 b. Same, caudal part, more highly magnified.

Leydigia propinqua, G. O. Sars.

- Fig. 4. Adult gravid female, viewed from left side; magnified 85 diameters.
— 4 a. Same, caudal part, more highly magnified.

Alona acuticostata, G. O. Sars.

- Fig. 5. Adult female, viewed from left side; magnified 170 diameters.
— 5 a. Same, caudal part, more highly magnified.
— 5 b. Adult male, viewed from left side.
-

Pl. II.

Diaptomus Chaffanjonii, Richard.

- Fig. 1. Adult ovigerous female, dorsal view; magnified 62 diameters.
— 1 a. Same, without the ovisac, viewed from left side.
— 1 b. Same, urosome together with the posterior part of metasome, viewed from the dorsal face; more highly magnified.
— 1 c. Same, last pair of legs.
— 1 d. Extremity of left leg, more highly magnified.
— 1 e. Adult male, dorsal view.
— 1 f. Same, outer part of right anterior antenna, more highly magnified.
— 1 g. Same, last pair of legs.

Cypris purpurascens, Baird.

- Fig. 2. Adult female, viewed from right side; magnified 68 diameters.
— 2 a. Same, dorsal view.
— 2 b. Same, anterior maxilla, without the vibratory plate, more highly magnified.
— 2 c. Same, right caudal ramus.
— 2 d. Immature specimen of the same species, viewed from right side.

Cypris vittata, G. O. Sars.

- Fig. 3. Adult female, viewed from right side; magnified 68 diameters.
— 3 a. Same, dorsal view.
— 3 b. Same, end-view.
— 3 c. Right caudal ramus, more highly magnified.

Cypris decorata, G. O. Sars.

- Fig. 4. Adult female, viewed from right side; magnified 68 diameters.
— 4 a. Same, dorsal view.
— 4 b. Same, right caudal ramus, more highly magnified.

Pl. III.

Hemicypris pyxidata (Moniez).

- Fig. 1. Adult female, viewed from left side; magnified 68 diameters.
— 1 a. Same, dorsal view.
— 1 b. Another specimen, in which the left valve has been removed, in order to show the enclosed animal; more highly magnified.

Fig. 1 c. Left valve of same specimen, viewed from the inner face, and exhibiting the corresponding coecal appendage of intestine and ovarian tube.

— 1 d. Left anterior maxilla.

— 1 e. Left posterior maxilla.

— 1 f. Left caudal ramus.

Hemicypris ovata, G. O. Sars.

Fig. 2. Adult female, viewed from left side; magnified 68 diameters.

— 2 a. Same, dorsal view.

— 2 b. Left caudal ramus.

Hemicypris megalops, G. O. Sars.

Fig. 3. Adult female, viewed from left side; magnified 68 diameters.

— 3 a. Same, dorsal view.

— 3 b. Left caudal ramus.

Leptocypris papyracea, G. O. Sars.

Fig. 4. Adult female, viewed from left side; magnified 58 diameters.

— 4 a. Same, dorsal view.

— 4 b. Left anterior maxilla.

— 4 c. Left caudal ramus.

PL. IV.

Notodromas oculata, G. O. Sars.

Fig. 1. Adult female, viewed from left side; magnified 80 diameters.

— 1 a. Same, dorsal view.

— 1 b. Same, ventral view.

— 1 c. Left caudal ramus.

Cypria crenulata, G. O. Sars.

Fig. 2. Adult female, viewed from right side; magnified 80 diameters.

— 2 a. Same, dorsal view.

— 2 b. Right caudal ramus.

Cypridopsis exigua, G. O. Sars.

Fig. 3. Adult female, viewed from left side; magnified 80 diameters.

— 3 a. Same, dorsal view.

— 3 b. Caudal rami.

Cypridopsis adusta, G. O. Sars.

- Fig. 4. Adult female, viewed from left side; magnified 80 diameters.
— 4 a. Same, dorsal view.
— 4 b. Left caudal ramus.

Cypridopsis dubia, G. O. Sars.

- Fig. 5. Adult female, viewed from left side; magnified 80 diameters.
— 5 a. Same, dorsal view.
— 5 b. Right caudal ramus.

Dolerocypris fasciata (Müller).

- Fig. 6. Adult female, viewed from left side; magnified 56 diameters.
— 6 a. Left caudal ramus.

Dolerocypris sinensis, G. O. Sars.

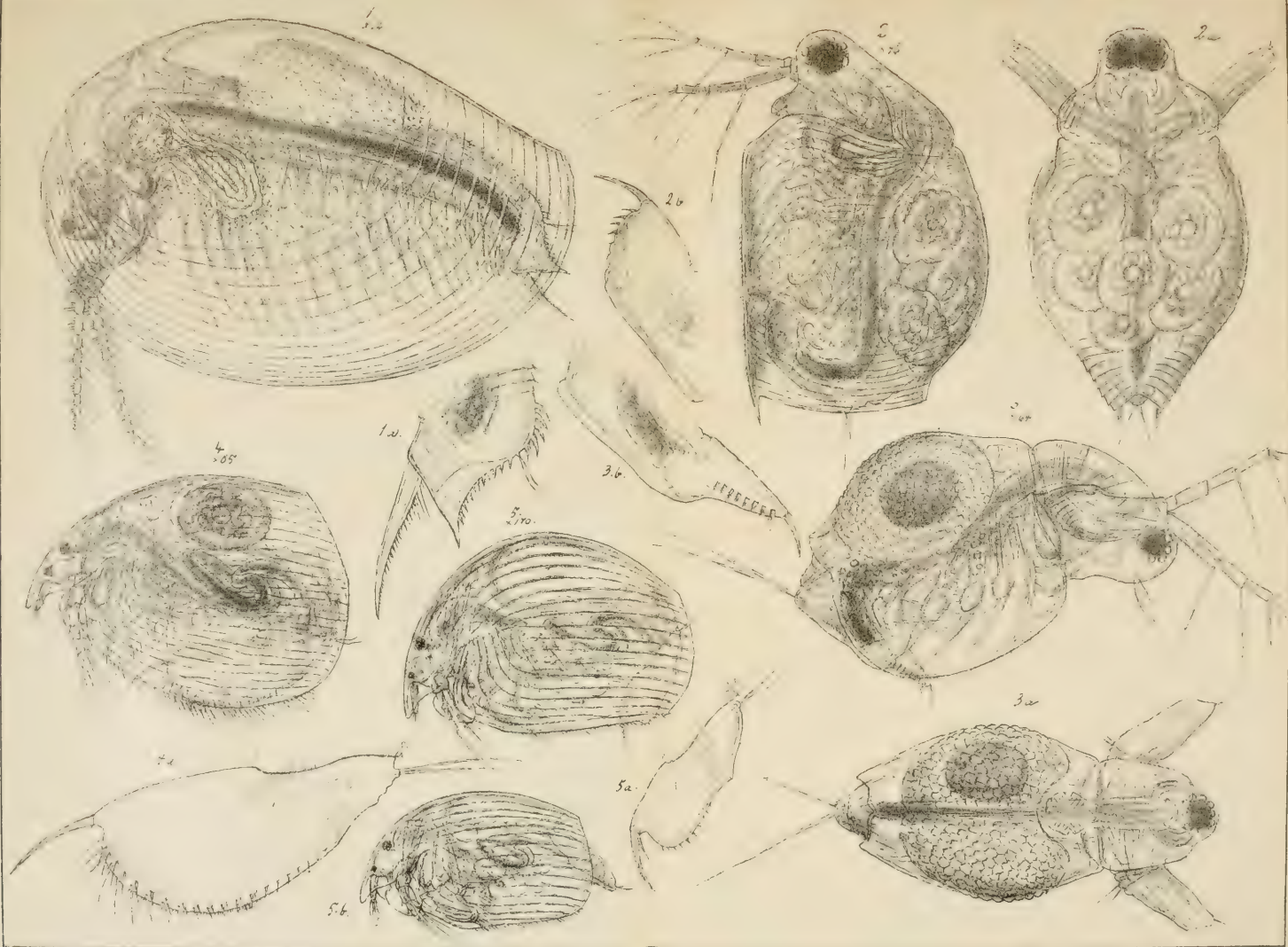
- Fig. 7. Adult female, viewed from left side; magnified 56 diameters.
— 7 a. Same, dorsal view.
— 7 b. Left caudal ramus.

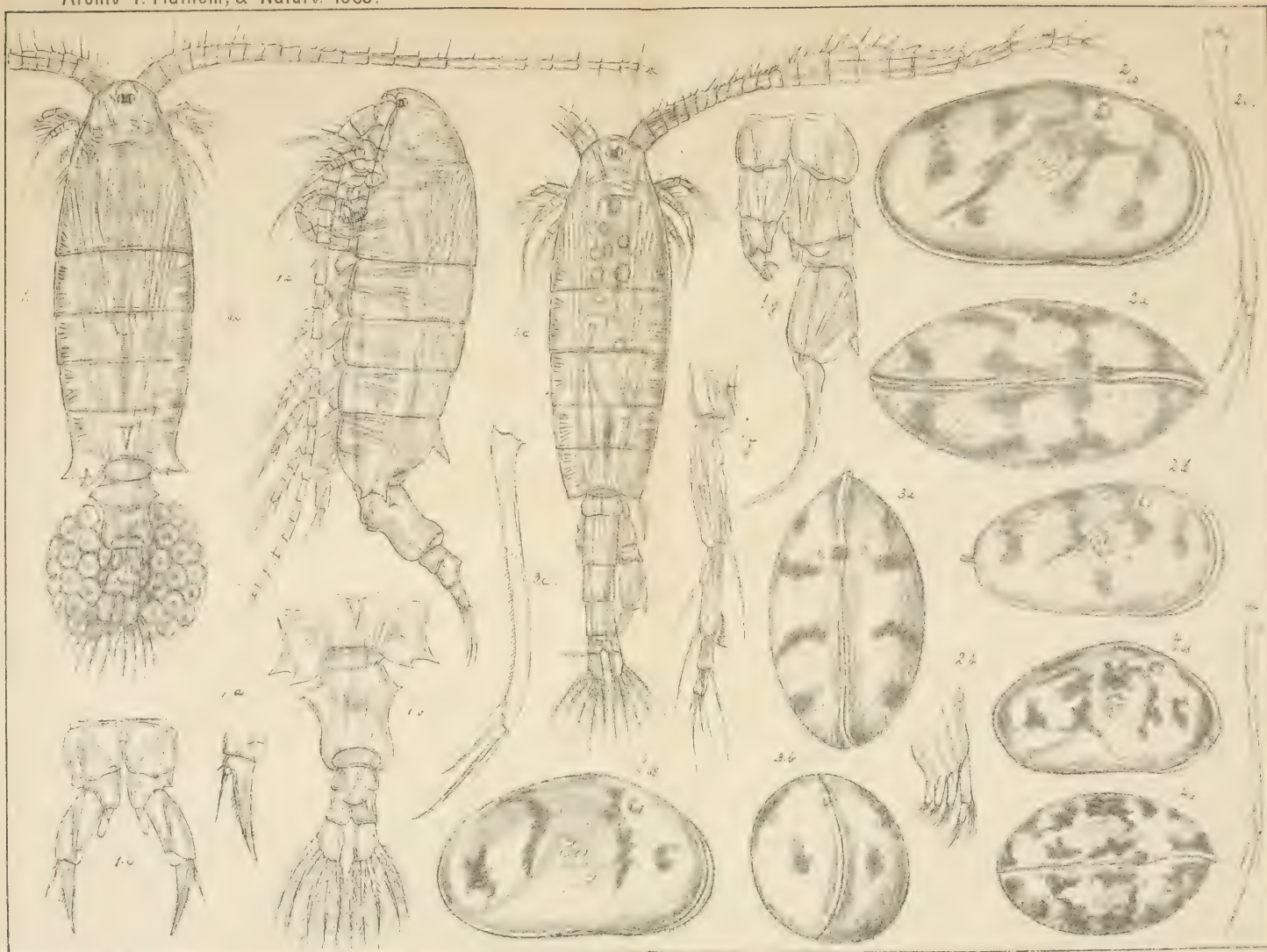
Ilyocypris dentata, G. O. Sars.

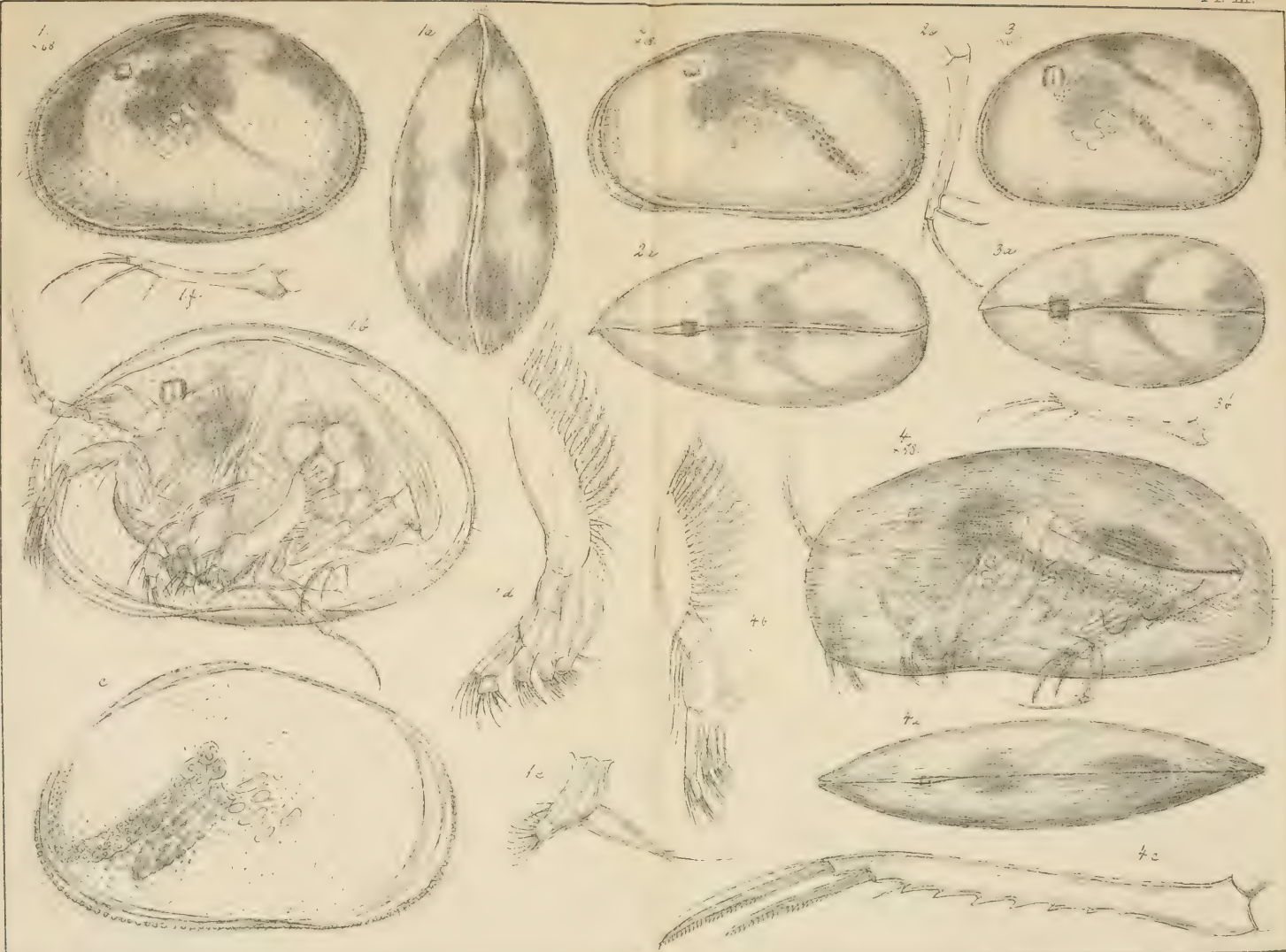
- Fig. 8. Adult female, viewed from left side; magnified 68 diameters.
— 8 a. Same, dorsal view.
— 8 b. Adult male, viewed from left side.
— 8 c. Left caudal ramus of female.

Ilyocypris angulata, G. O. Sars.

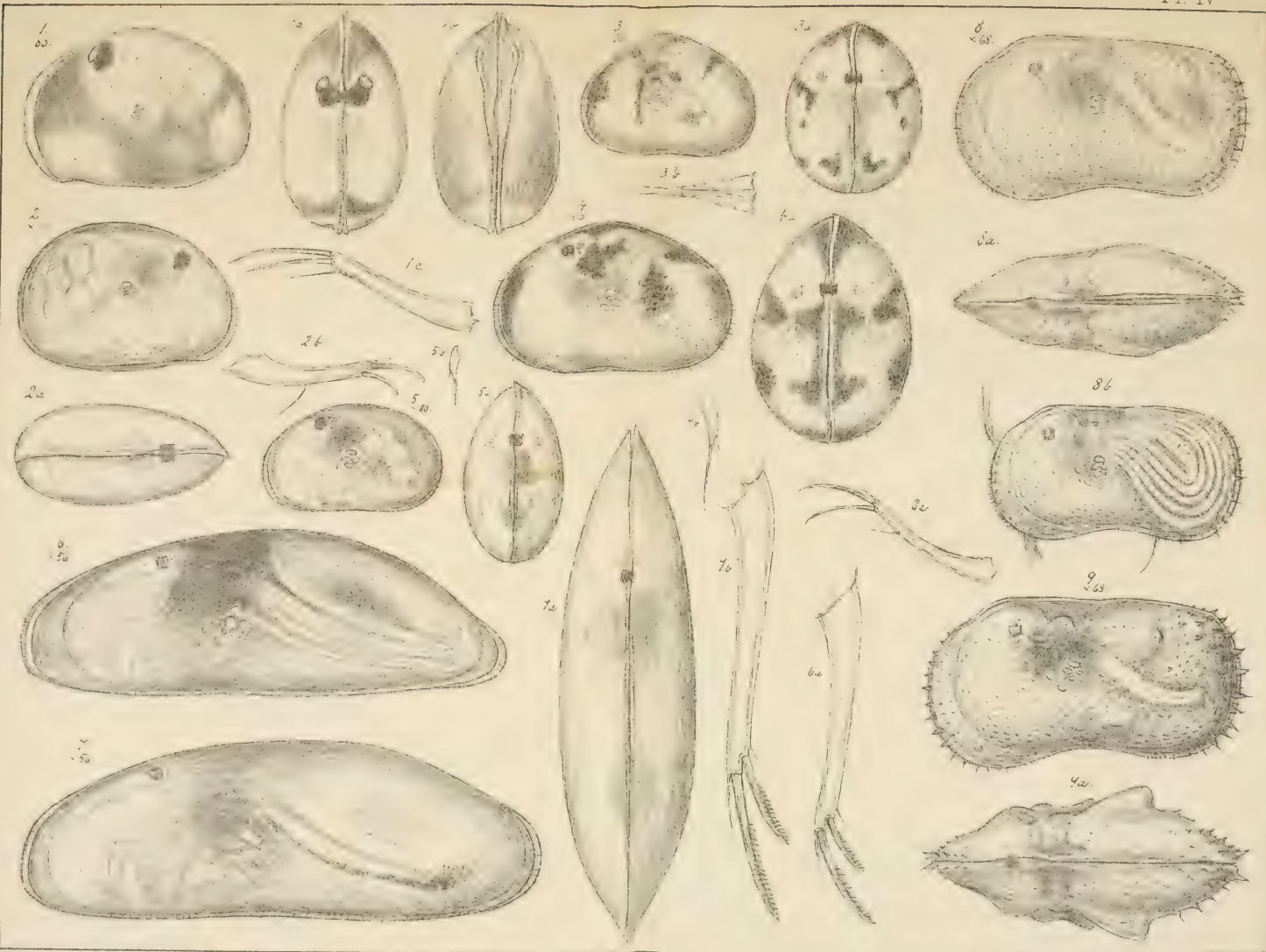
- Fig. 9. Adult female, viewed from left side; magnified 68 diameters.
— 9 a. Same, dorsal view.
-













NEUE NORWEGISCHE
SCHMETTERLINGSFORMEN

VON

EMBR. STRAND



ALB. CAMMERMEYERS FORLAG

Morten Johansens Bogtrykkeri. — Kristiania 1903.

NEUE NORWEGISCHE SCHMETTERLINGSFORMEN.

VON

EMBR. STRAND.

1. *Erebia polaris* Stgr. *ab. pseudomedusa* Strand n. ab.

Indem ich als Hauptform dieser Art diejenige, welche auf beiden Flügelpaaren mit mehreren (3—4) Ocellen versehen ist, betrachte, bezeichne ich die durch Reduction dieser Anzahl entstandene Abänderung als *ab. pseudomedusa m.* Dieselbe hat auf den Vorderflügeln nur zwei Ocellen und zwar diejenigen in Zelle 4 und 5, auf den Hinterflügeln nur einen kleinen Augenpunkt. Die Ocellen der Vorderflügel von sehr schmalen rothen Ringen eingefasst und mit undeutlichen Pupillen; auf den Hinterflügeln fehlen die Pupillen ganz.

Diese Form kommt ziemlich selten vor und am meisten oder vielleicht ausschliesslich im männlichen Geschlechte, wenigstens habe ich noch kein weibliches Exemplar davon gesehen. Bekanntlich zeichnet ja das männliche Geschlecht dieser Art, wie dasjenige von *E. medusa*, sich durch kleinere und weniger Ocellen aus; während die Weibchen mit je 4 Ocellen auf den Flügelpaaren versehen sind, haben die Männchen deren durchgehends nur je 3. Anscheinend

gleichzeitig mit der Reduction der Ocellen geht ein Undeutlichwerden der hellen Binde der Unterseite; man findet deshalb diese Binde bei Weibchen durchgehends am deutlichsten entwickelt, während dieselbe bei ausgeprägten Exemplaren von *pseudomedusa* nicht oder kaum merklich ist. Durch letzteres Merkmal nähert die neue Aberration sich der nächstverwandten Art, *E. medusa* F., während andererseits ihre geringere Anzahl Ocellen sie von *medusa* entfernt.

Die von *Zetterstedt* in «*Insecta lapponica*» und von *Wallengren* in «*Skandinavians dagfjärilar*» als *var. b.* diagnosticirte Form fällt mit der unsrigen zusammen.

Ueber die Artrechte von *Erebia polaris* sind ja noch die Meinungen verschieden. Mir scheint es, dass alles dafür spricht, sie als distinkte Art aufzufassen, und ich führe sie deshalb, ebenso wie *Gumpenberg*, *Aurivillius*, *Bramson* und *Sparre Schneider* gethan haben, als solche auf. Aber im neuen *Staudinger*-Cataloge figurirt sie noch als Varietät von *medusa* F.

Type im Zoologischen Museum zu Kristiania.

2. *Lycaena cyllarus* Rott. v. *Schneideri* Strand n. v.

Die norwegische Form dieser Art tritt als eine besondere Localvarietät auf, die sich hauptsächlich dadurch auszeichnet, dass bei den Weibchen die blaue Färbung sich über die ganze oder fast die ganze Fläche der beiden Flügel ausbreitet. Braun bleibt nur der Saum und die Spitze des Vorderrandes der Vorderflügel, sowie der ganze Vorderrand der Hinterflügel. Die Saumbinde der Vorderflügel ist etwas breiter als beim Männchen, besonders an der Spitze, woher sie sich gewöhnlich auch ziemlich breit

bis zur Mitte des Vorderrandes verlängert. Wurzelwärts ist sie ganz unbestimmt begrenzt und breitet sich zwischen den Rippen als undeutliche, schattenförmige Streifen aus; dieselben erreichen jedoch nicht die Mitte des Flügels. Die Saumbinde der Hinterflügel ist ebenso schmal als diejenige beim Männchen; der ganze Vorderrand von der Wurzel bis zur Spitze des Flügels ist breit braun, jedoch tritt hinter der Mittelrippe immer wieder die blaue Färbung auf. — Die blaue Färbung der Weibchen ist etwas trüber, mehr violettlich, als diejenige der Männchen; der Mittelstrich ist deutlich. — Auf der Unterseite der Flügel ist die norwegische Form durch eine Reduction der Anzahl der Augenpunkte charakteristisch; auf den Vorderflügeln sind gewöhnlich nur die vier mittleren vorhanden, und diese sind auch durchgehends kleiner als bei der Hauptform; ganz selten finden sich deren 5 oder 6, während bei einem Stück (♂) die Anzahl auf 2 reducirt ist. Auf den Hinterflügeln ist gewöhnlich nur der am Vorderrande gelegene Punkt der Reihe vorhanden; hinter diesem finden sich am öftesten 2—4 sehr kleine, undeutliche Punkte, die aber auch fehlen können. Bisweilen sind sogar *alle* Punkte der Hinterflügel verschwunden. Die grünpangrüne Färbung der Wurzel der Hinterflügel breitet sich in vielen Fällen beinahe über die ganze Flügelfläche aus. Die Grundfarbe der Unterseite der Hinterflügel anscheinend ein wenig heller als bei der Hauptform.

Endlich zeichnet sich die neue Form durch geringere Grösse aus. Nach den im hiesigen Zoologischen Museum vorhandenen Exemplaren schwankt dieselbe zwischen 23 und 32 mm; die Maximumsgrösse der norwegischen erreicht demnach nicht die Minimumsgrösse mitteleuropäischer Exemplare.

Benannt habe ich die neue Form nach Herrn Custos *Sparre Schneider*, der zuerst auf diese Varietät aufmerksam gemacht hat.

Type im hiesigen Museum.

3. *Hesperia alveus* Hb. ab. *suffusa* Strand n. ab. et v. *scandinavicus* Strand n. v.

Ein bei Kristiansand gesammeltes Stück dieser Art stimmt was die Oberseite betrifft ziemlich gut mit *Hübner's* Fig. 506, nur ausgenommen, dass die gegen den Saum und Innenrand schräg gestellte Reihe von 4 kleinen Punkten bei diesem Exemplar nur aus 2 Punkten gebildet wird. Die Oberseite der Hinterflügel mit den für *alveus* charakteristischen schattenartigen hellgrauen Zeichnungen. Die genannte *Hübner's*che Figur wird ja jetzt zu *serratulae* Rbr. gezogen und soll dieselbe Form als *caecus* Frr. darstellen. Wie aber die Unterseite meines Exemplares zeigt, gehört es zweifellos *alveus* an und ist also nicht ab. von *serratulae*. Die Flügel-expansion ist 30 mm. — Diese Form, die also durch die Reduction der weissen Zeichnungen der Oberseite der Vorderflügel gekennzeichnet ist und in demselben Verhältniss zu *alveus* wie *caecus* Frr. zu *serratulae* Rbr. steht, dürfte Anspruch auf einen besonderen Namen haben; ich schlage ab. *suffusa* m. vor.

Die bei uns vorkommende Form von *H. alveus* Hb. weicht so sehr von der mitteleuropäischen Form, der Hauptform, ab, dass sie als eigene Localvarietät abgetrennt zu werden verdient (*v. scandinavicus* m.). Die hauptsächlichsten Unterschiede sind folgende:

Oberseite der Vorderflügel. — Der weisse Fleck an der Mitte von Dorsum gewöhnlich kleiner, undeutlicher. Die drei Flecke der Reihe, die Dorsum am nächsten stehen, bilden eine gerade Linie, während sie bei mitteleuropäischen Exemplaren einen Triangel bilden; mit anderen Worten: während bei mitteleuropäischen Stücken die 4 hintersten Flecke zwei *parallele* Linien bilden, die eine durch Nr. 1 und 3, die andere durch 2 und 4 (von Dorsum gezählt) bestimmt, bilden dieselben Flecke bei der norwegischen Form zwei vorn deutlich *divergirende* Linien.

Unterseite der Vorderflügel. — Der weisse Streif am Vorderrande dehnt sich bei mitteleuropäischen Stücken bis zur Mitte, während er bei norwegischen Exemplaren oft nur an der Wurzel deutlich ist; weder der Discoidalfleck noch andere Flecke in Grösse oder Farbe besonders hervortretend. Die Grundfarbe nicht deutlich heller in der Spitze.

Unterseite der Hinterflügel. — Der bei Dorsum gelegene Wurzelfleck von den anderen Wurzelflecken *getrennt*; der Costalfleck nicht so deutlich viereckig; der Mittelfleck saumwärts gewöhnlich gerade abgeschnitten. Der Dorsum am nächsten gelegene Fleck der Mittelbinde von den drei vordersten *getrennt*, indem die Zellen 2 und 3 keine oder sehr kleine Flecke führen. Die Rippen nicht röthlich, sondern gelblich oder weissgrau, in vielen Fällen jedoch kaum merklich heller als die Grundfarbe.

Die *Grösse* der norwegischen Exemplaren schwankt zwischen 25 und 30 mm; die häufigste dürfte 26—27 mm sein.

Unter den von *Schilde* in «Berliner entomologischen Zeitschrift» (1886) gegebenen Figuren, stimmt Nr. 2 («*Pyrgus alveus*, alpin von Bergün») mit *v. scandinavicus* am besten, aber der Wurzelfleck 2 ist bei *Schilde* zu weit gegen die

Wurzel vertrieben, auch saumwärts ausgehöhlt, der Dorsalfleck der Mittelbinde zu klein und auch anders gestaltet. *Schilde* bezeichnet dieselbe als «eine zu *serratulae* neigende Form.»

Type im Zoologischen Museum zu Kristiania.

4. *Phalera bucephala* L. ab. *demaculata* Strand n. ab.
et v. *tenebrata* Strand n. v.

Sparre Schneider berichtet, daß Exemplare aus der Umgegend von Bergen heller als Exemplare aus dem südöstlichen Norwegen gefärbt sind. Was diese letzteren betrifft, so variiren sie (nach einer Anzahl aus der Umgegend von Kristiania zu urtheilen) etwas, aber nicht bedeutend. Ihre Hinterflügel sind gelblich grau oder bräunlich grau; mit gelblich *weissen* Hinterflügeln, wie die Art in Deutschland, England etc. und nach *Schneider* auch bei Bergen auftritt, habe ich kein Stück aus der hiesigen Gegend gesehen. Auch die Vorderflügel hiesiger Exemplare sind sehr dunkel, indem die silbergraue Färbung selbst an der Wurzel und am Innenrande gewöhnlich wenig ausgeprägt ist. Die Mitte der Flügelfläche ist einfarbig, indem die feinen Querlinien von der dunklen Grundfarbe ganz oder fast ganz verdeckt sind; die Mittelmakel wenig deutlich, ja bisweilen fehlt sie ganz und gar (*ab. demaculata m. n. ab.*). Auf der Unterseite sind die Hinterflügel in der Saumhälfte bisweilen hellgelb, häufig aber dunkler; in der Wurzelhälfte der Hinterflügel und besonders auf den Vorderflügeln ist die Unterseite heller oder dunkler bräunlich grau. — Die Grösse schwankt zwischen 44 und 58 mm. — Auch in Schweden soll die Art in besonders dunklem Gewand auftreten.

Wegen der abweichenden Färbung dürfen hiesige Exemplare dieser Art darauf Anspruch machen können als eine eigene Localrasse aufgefasst werden, welche über das südöstliche Norwegen und südliche Schweden verbreitet zu sein scheint.

Dieselbe möge den Namen *v. tenebrata m.* führen.

Type im hiesigen Zoologischen Museum.

5. *Aglia tau* L. **ab. subcaeca Strand n. ab.**

Diese Aberration zeichnet sich dadurch aus, dass die Augen ohne weisse Pupillen sind; diejenigen der Vorderflügel oben mit einem graulichen Punkt in der Mitte, unten mit bläulicher Pupille, die ungefähr von der gewöhnlichen Form und Grösse ist. Die Augen der Hinterflügel ohne jede Andeutung einer helleren Pupille; der schwarze Ring demnach nur blau ausgefüllt. Unten eine Pupille, die jedoch nicht weiss, sondern ockergelblich, ist. — Das einzige vorhandene Exemplar (bei Næs Verk in Nedenaes gefangen) ist übrigens etwas düster gefärbt mit undeutlichem Antelimbalsstreif auf den Vorderflügeln.

Type im hiesigen Zoologischen Museum.

6. *Acronycta megacephala* F. **ab. pulla Strand n. ab.**

Die vorliegenden norwegischen Exemplare sind durchgehends alle sehr dunkel gefärbt; die weissen Zeichnungen sind nur ausnahmsweise scharf, und von röthlichem Anfluge ist kaum eine Spur vorhanden. Bei den am dunkelsten gefärbten Stücken sind Kopf, Halskragen und Rücken schwarz mit wenig grauer Beimischung; die ganze Fläche

der Vorderflügel so mit schwarz überzogen, dass die hellen Zeichnungen, die nicht weiss, sondern graulich sind, theils ganz verschwinden, theils nur undeutlich werden. Die erste Querlinie ist nur am Vorderrande schwach angedeutet, während die zweite Querlinie nur in ihrer vordern Hälfte, sowie am Innenrande, durch einen graulichen Wisch zu erkennen ist. Von den Makeln ist nur die Ringmakel deutlich erkennbar. Das Saumfeld schwarz mit einigen unbestimmten, graulichen, gesonderten Wischen als Andeutung der Wellenlinie.

Diese Form, die ich als *ab. pulla m.* bezeichne, kommt u. a. bei Kristiania vor.

Type im Kristiania Museum.

7. *Agrotis brunnea* F. *ab. suffusca* Strand n. ab.

Als ganz seltene Abart von *Agrotis brunnea* tritt eine Form auf, bei welcher die Vorderflügel heller graubraun und die Franzen ein wenig bräunlicher gefärbt sind; der an typischen Stücken so deutliche violette Anflug ist hier nur schwach am Vorderrande, in der Wurzelhälfte, bemerkbar. Die Makeln sind wenig auffallend; die Zapfenmakel ist verschwunden, nur sieht man ein kleiner schwarzer Ring an ihrer Stelle. Die Hinterflügel ziemlich hell. — Diese Form möge den Namen *ab suffusca m.* führen.

Type im Kristiania Museum.

8. *Agrotis corticea* Hb. v. *strigosa* Strand n. v.

Die von *Hübner* abgebildete Form dieser Art ist eigenthümlich dadurch, dass die Querlinien mit Ausnahme der

Wellenlinie gänzlich fehlen. Unter den 43 im Kristiania Museum vorhandenen Exemplaren findet sich kein einziges, bei welchem dies der Fall ist; alle haben die das Mittelfeld begrenzenden Querlinien nicht nur deutlich, sondern meistens auch scharf ausgeprägt. Eine andere konstante Abweichung von der von *Hübner* abgebildeten Form, ist, dass die Hinterflügel nicht so scharf begrenzte Aussenrandbinde haben; dieselbe geht bei der norwegischen Form so allmählich in die hellere Wurzelhälfte über, dass sich keine Grenze konstatiren lässt. Sehr häufig sind die Hinterflügel durchaus gleich dunkel überall und zwar selten so hell als bei *Hübner* dargestellt.

Zwar ist *Agrotis corticea* bekanntlich «sp. valde aberrans», da aber die erwähnten Abweichungen von der *Hübner'schen* Form, die selbstverständlich als die Hauptform betrachtet werden muss, sich bei einer so grossen Zahl von Exemplaren konstant wiederfinden, muss man annehmen, dass die Art bei uns in einer besonderen Varietät vorkommt, die einen eigenen Namen zu führen verdient (*v. strigosa Strand*).

9. *Mamestra pisi* L. ab. (v.?) *saltdalensis* Strand n. ab.

Das einzige aus unserer arktischen Region bis jetzt bekannte Exemplar dieser Art hat, wenn auch eine unzweifelhafte *pisii*, ein so abweichendes Aussehen, dass es zu einer besonders zu benennenden Form gezogen werden muss, indem dieselbe weder mit den im Cataloge erwähnten Varietäten, noch mit der in demselben fehlenden *v. splendens Stph.* (= *aestiva Rothke*) zusammenfällt. Es zeichnet sich besonders durch mehr einförmige Zeichnung, sowie durch

geringere Grösse (30^{mm}) aus. Die Grundfarbe dunkel braun mit röthlichem Anfluge ohne graue Beimischung und nur in der inneren Hälfte des Mittelfeldes schwach gelblich. Durch das Mittelfeld kein dunkler Schattenstreifen; zwischen den beiden Makeln rostfarbig, diese von der Grundfarbe ausgefüllt und deshalb undeutlich. Die Querlinien kaum wahrnehmbar, die Wellenlinie undeutlich, der Fleck im Innenwinkel sehr klein. Die Wellenlinie saumwärts nicht schwarz angelegt. Die Franzen der Vorderflügel mehr einfarbig.

Nach dem Fundorte (Saltdalen in Nordland) *ab. salt-dalensis m.* benannt.

Type im Kristiania Museum.

**10. *Diloba coeruleocephala* L. *ab. bipartita* Strand n. *ab.*
et ab. orbimaculata Strand n. *ab.***

Unter den im Museum vorhandenen 12 Exemplaren dieser Art (mit einer einzigen Ausnahme bei Kristiania gesammelt) zeichnen 5 sich dadurch aus, dass die zwei grossen, 8-ähnlichen Flecken, die ja in der Regel zusammengeflossen, hier deutlich getrennt sind. Nach der Stückzahl scheint es, dass diese Form hier häufig vorkommt; aus anderen Gegenden wird von derselben als eine grosse Seltenheit berichtet. So z. B. schreibt *Treitschke*: «Bey so vielen Stücken, die ich zur Vergleichung vor mir habe, finde ich ein einziges, wo die zwey runden Makeln von der Nierenmakel *getrennt* sind.» In wie weit hiesige Stücke noch andere Eigenthümlichkeiten aufweisen, die zur Auffassung derselben als eine besondere Localvarietät berechtigen, kann

ich augenblicklich, wegen Mangels an Vergleichsmaterial, nicht beurtheilen; jedenfalls verdient die Form, die also vorläufig als Aberration gelten kann, einen eigenen Namen. Ich schlage *ab. bipartita m.* vor.

Eine andere Form, die nur in einem Stück vorhanden ist, hat die zwei grossen Makeln wie gewöhnlich zusammengefloßen, aber wurzelwärts, zwischen denselben und der Querlinie, befindet sich eine dritte Makel, die rund und klein, aber wie die anderen gefärbt und scharf begrenzt ist (*ab. orbimaculata m.*).

11. *Hadena lateritia* Hfn. v. *borealis* Strand n. v.

Nordische, besonders arktische, Individuen dieser Art weichen, wenn auch nicht durch besonders in die Augen fallende einzelne Merkmale, so doch durch den Totaleindruck so von südlicheren Individuen ab, dass sie als einer besonders zu benennenden Form angehörend betrachtet werden müssen. Die Grundfarbe ist dunkler, brauner, mit oder seltener ohne deutlich graue Beimischung. Die hellen und dunklen Punkte am Vorderrande durchgehends ein wenig deutlicher; der dunkle Streif von der Nierenmakel bis zum Vorderrande mehr auffallend. Die Franzen dunkler, nicht oder kaum röthlich. Hinterflügel auch ein wenig dunkler, mehr graulich. Thorax dunkelbraun, meistens mit grauer Beimischung. — Die Grösse der vorliegenden arktischen Individuen ist 37—42 mm; demnach etwas kleiner als südlichere Exemplare.

Diese Form, die ich *v. borealis m.* nenne, kommt nicht nur in der arktischen Region vor, sondern ist auch südlicher, so in einigen Küstengegenden (*Schöygen*), auf Dovre(?)

(Wocke), beobachtet worden. Tritt dort wahrscheinlich nur als Aberration auf.

Type im Kristiania Museum.

12. *Scopelosoma satellitia* L. ab. *albipuncta* Strand n. ab.

Bekanntlich tritt diese Art bald mit gelbem, bald mit weissem Mittelfleck auf. Da die gelbgefleckte Form von *Linné* als die Hauptform fixirt worden ist, wäre eine eigene Aberrationsbenennung mit der weissgefleckten Form zu verbinden, und ich schlage vor, dieselbe als *ab. albipuncta m.* zu bezeichnen. *Ab. albipuncta* kann sowohl bei der Hauptform als bei *v. brunnea* Lpa. vorkommen; letztere Varietät ist bei uns ebenso wie in Schweden häufiger als *forma principalis*.

13. *Xylina ingraca* Rott. ab. *basidiluta* Strand n. ab.

Diese Art tritt in zwei am meisten leicht zu unterscheidende Formen, eine hellere und eine dunklere, auf. Die eine zeichnet sich durch gleichmässig hell gelbbraune Grundfarbe der Vorderflügel aus; am besten wird sie durch das einfarbige Basalfeld, dessen Raum zwischen der Mittelzellader und dem Innenrande *nicht* schwarzbraun ist, characterisirt. Ebenso hat sie den Raum zwischen den beiden Makeln nur schwach verdunkelt und unter den Makeln nur einen kleineren dunklen Wisch. Diese Form, die ich als *ab. basidiluta m.* bezeichne, ist wohl überall weniger häufig als die dunklere Form, die durch einen über die Innenrandshälfte der Flügel verlaufenden und besonders unter den Makeln auffallenden, schwarzbraunen Längsstreifen aus

der Wurzel ausgezeichnet ist. Diese letztere Form (*f. pr.*) hat meistens auch dunklere Hinterflügel als *ab. basidiluta m.*

Type im hiesigen Zoologischen Museum.

14. *Triphosa dubitata* L. *ab. punctigera* Strand n. *ab.*

Die Zeichnungen der Hinterflügel dieser Art bestehen ja bekanntlich in weissen und schwärzlichen Punkten auf den Rippen, sowie in mehreren Querlinien. In vielen Fällen wird aber diese Zeichnung reducirt, so dass es verhältnissmässig selten ist dieselbe völlig entwickelt zu finden. Zuerst verschwinden die an und hinter der Mitte stehenden dunklen Querlinien, während die unmittelbar vor dem Saume stehende weisse Wellenlinie am längsten deutlich bleibt. Bisweilen verschwindet aber auch diese; die einzige von den Zeichnungen der Hinterflügel, die konstant bleibt, ist der Mittelpunkt, indem auch die Rippenpunkten fehlen können. Solche Stücke, die auf den Hinterflügeln bis auf dem Mittelpunkte und bisweilen auch den Rippenpunkten unbezeichnet sind, ziehe ich unter dem Namen *ab. punctigera m.* zusammen.

Type im Kristiania Museum.

15. *Larentia dotata* L. *ab. deleta* Strand n. *ab.*

Trotzdem, dass diese Art keineswegs bunt gezeichnet ist, ändert sie dennoch nicht unerheblich ab, wenn auch die Aenderungen meist nur in grösserer oder weniger Deutlichkeit der Zeichnungen bestehen. Nach den vorliegenden 25 Exemplaren, die aus verschiedenen Gegenden Norwegens und auch aus der arktischen Region herrühren,

kommt die Art bei uns sehr selten in völlig ausgefärbten Exemplaren vor. Am häufigsten fehlen die dunklen Zeichnungen im Saumfelde, und die Franzen sind oft gänzlich ohne braune Beimischung; seltener werden auch die Querlinien undeutlich. Die am hellsten gefärbten Stücke führen auf den Vorderflügeln keine andere Zeichnungen als die beiden mittleren Querlinien, indem auch die Wurzelquerlinien verwischt sind, bezw. gänzlich fehlen. Die vorhandenen Querlinien sind am Vorderrande am deutlichsten, am Innenrande bisweilen kaum wahrnehmbar. Die ganze Saumhälfte der Vorderflügel sowie die Franzen sind also völlig einfarbig, bleichgelb.

Dieser Form, die bei uns ziemlich häufig vorkommt und wohl überall als mehr weniger seltene Aberration auftritt (so z. B. wird sie von *Hormuzaki* aus Bukowina erwähnt), lege ich den Namen *ab. deleta m.* bei.

Type im hiesigen Zoologischen Museum.

16. *Larentia serraria* Z. f. *continua* Strand n. f.

Die beiden weissen Querlinien, welche das Mittelfeld begrenzen, sind häufig längs der Rippe 2 verbunden, indem die äussere Querlinie an der betreffenden Stelle einen Zahn gegen die Wurzel sendet, der sich betreffenden Falles so verlängert, dass dadurch eine Verbindung mit der inneren Querlinie zu stande kommt. Bisweilen findet sich eine ähnliche Verbindung längs der Rippe 1. Dadurch, dass die Querlinien so verbunden werden, wird also das Mittelfeld in zwei bezw. drei Stücke getheilt, wovon dasjenige am Innenrande sehr klein und ellipsenförmig, das Mittelstück 2—3 so gross und aus zwei gleichförmigen, zusammen-

hängenden Flecken bestehend, während das Vorderrandstück mehr als zweimal so gross als die beiden anderen ist. Auch das innere Zwischenfeld wird nicht selten in ähnlicher Weise aufgetheilt.

Nach den im Museum vorhandenen Exemplaren zu urtheilen, ist die beschriebene Form häufiger als diejenige, bei welcher das Mittelfeld zusammenhängend ist. Sie wäre demnach am besten als die Hauptform anzusehen; als solche wird sie auch von *Gumpenberg* aufgeführt, indem er der anderen Form nicht einmal Erwähnung thut. Als *ab.* oder vielleicht besser *forma* wäre so die mit *zusammenhängendem* Mittelfelde versehene Form zu bezeichnen, und schlage ich für dieselbe den Namen *f. continua m.* vor.

17. *Larentia taeniata* Stph. f. *latefasciata* et f. *angustifasciata* Strand n.

Mit vollem Recht ist diese Art in *Staudinger's* Catalog als «sp. valde aberrans» bezeichnet. Da mir ein reiches Material zur Verfügung steht, wären einige Bemerkungen darüber hoffentlich nicht übel angebracht, so viel mehr als sie den meisten mitteleuropäischen Lepidopterologen wohl wenig bekannt ist.

Was zuerst die Grösse betrifft, so schwankt diese zwischen 17 und 23 mm für bezw. die kleinsten Männchen und die grössten Weibchen. — Die Zeichnungen der Vorderflügel sind bald scharf ausgeprägt, indem die Mittelbinde dunkel braun bis fast schwarz sein kann, während gleichzeitig die hellen Querlinien weiss oder weisslich erscheinen, bald sind die Felder kaum merklich geschieden, indem die hellen

Partien von der dunklen Färbung überzogen, und die Grenzlinien undeutlich sind. Das Wurzelfeld ist gewöhnlich ebenso dunkel als das Mittelfeld, bisweilen aber kaum von dem inneren Zwischenfelde verschieden. Im Saumfelde ist die verschiedene Deutlichkeit des weissen Fleckes der Zellen 4—6 besonders auffallend, indem derselbe bald den ganzen genannten Raum einnimmt und rein weiss ist, bald von der dunklen Färbung bis zum völligen Undeutlichwerden bedeckt ist.

Besonders charakteristisch ist aber die Mittelbinde, und man kann nach derselben zwei Formen gegenwärtiger Art unterscheiden. Die eine zeichnet sich durch sehr breite, dunkelbraune bis schwarze Mittelbinde aus. Ihre Breite überschreitet oder kommt dem Drittel der Flügellänge wenigstens gleich; sie ist ganz einfarbig, nicht gewässert, nur der Mittelpunkt bleibt immer deutlich. Diese Form, welche ich als *f. latefasciata m.* bezeichne, findet ihren Gegensatz in einer, bei welcher die dunkle Mittelbinde so verjüngt ist, dass ihre Breite kaum ein Sechstel der Flügellänge beträgt; die Mittelbinde ist in diesem Falle stark weisslich gewässert oder gemischt, besonders in ihrer äusseren Hälfte, wodurch sie noch weniger auffallend erscheint. Ebenso viel als die Mittelbinde an Breite abgenommen, haben die Zwischenfelder zugenommen, während das Wurzelfeld, sowie das Saumfeld, bei beiden Formen gleich breit sind. Beide Zwischenfelder sind sehr hell, und der weisse Fleck im Saumfelde ist auffallend gross. (Bei *f. latefasciata* scheint in beiden diesen Beziehungen gerade das Umgekehrte gewöhnlich der Fall zu sein.) — Diese durch schmale Mittelbinde sich auszeichnende Form kann den Namen *f. angustifasciata m.* führen.

F. latefasciata scheint die häufigere zu sein. Die am meisten ausgeprägten Exemplare beider Formen, die ich gesehen habe, sind weiblichen Geschlechtes.

Typen im Zoologischen Museum zu Kristiania.

18. *Larentia montanata* Schiff. ab. *constricta* Strand n. ab.

Bekanntlich zeichnet *v. lapponica* Stgr. von dieser Art sich durch verloschene, bisweilen fast ganz verwischte Mittelbinde aus. Diese Reduction geht bei *ab. albicans* Strand sogar so weit, dass dieselbe kaum wahrnehmbar ist; nur der Mittelpunkt bleibt immer deutlich. Auf Reduction der Mittelbinde bei der Hauptform ist in der Litteratur dagegen wenig berichtet, und in der That kommt solche auch selten vor. Immerhin findet es sich jedoch bei sonst ganz normalen Exemplaren der Hauptform, dass die Mittelbinde in der Innenrandshälfte abgeschnürt ist, so dass dieselbe aus zwei Theilen besteht, einem kleineren rundlichen Fleck am Innenrande und einem weit grösseren, etwas dreieckigen, in der Vorderrandshälfte. Ich nenne diese Form in Analogie mit der entsprechenden bei anderen *Larentia*-Arten *ab. constricta m.* Dieselbe ist u. a. bei Kristiania gefunden worden.

Type im hiesigen Museum.

19. *Larentia polata* Dp. ab. *constricta* Strand n. ab.

Diese Aberration zeichnet sich wie die oben beschriebene durch abgeschnürte Mittelbinde aus. Die Binde wird aber bei dieser Art nicht wie gewöhnlich bei anderen, ähnlich gezeichneten *Larentia*-Arten in oder gleich hinter der

Mitte abgeschnürt, sondern so nahe dem Innenrande, dass nur ein kleiner, runder, fast punktförmiger Theil von der Binde abgelöst wird. Gleichzeitig ist aber auch bald hinter der Mitte, an der gewöhnlichen Stelle, die Binde stark verjüngt, jedoch kenne ich kein Beispiel davon, dass sie auch an dieser Stelle völlig abgeschnürt ist. — Die beschriebene Form, die ich als *ab. constricta m.* bezeichne, kommt anscheinend nicht eben selten unter der Stammform vor.

Type im hiesigen Museum.

20. *Larentia byssata* Auriv. *ab. subbyssata* Strand n. *ab.*

Diese Aberration, wozu 2 der 8 im Museum vorhandenen Exemplare von *Lar. byssata* gehören, zeichnet sich auch durch abgeschnürte Mittelbinde aus, und zwar ist dies bei dem einen Exemplare in ganz derselben Weise wie bei der vorigen Art gesehen, indem also die Binde unmittelbar vor dem Innenrande abgeschnürt ist, bei dem anderen dagegen ist sie sowohl *auf* (nicht vor) dem Innenrande als zweimal in der Mitte abgeschnürt, so dass die Binde also im ganzen in drei Flecke zerfällt. Derjenige am Vorderrande ist grösser als die beiden anderen zusammen; derjenige in der Mitte ist der kleinste und gleich der Hälfte des hintersten. Die weissen Querlinien stiessen hinter dem letzten Flecke zusammen, so dass derselbe demnach nicht den Innenrand berührt.

21. *Larentia sordidata* F. *ab. constricta* Strand.

In meinem «Beitrag zur Schmetterlingsfauna Norwegens, III» («Nyt Mag. f. Naturv.» 1903) habe ich diese Form

schon kurz diagnosticirt, gebe aber hier einige ergänzende Bemerkungen. Sie wird dadurch gekennzeichnet, dass das Mittelfeld nicht von einer zusammenhängenden hellen Binde, sondern von gesonderten, rundlichen Flecken gebildet wird. Die Aberration stimmt mit den *Hübner'schen* Figuren 382 und 385, was die Form der Mittelbinde betrifft, und unterscheidet sich von *ab. fusco-undata* Don. dadurch, dass die Grundfarbe wie bei der Hauptform, also mehr grünlich als röthlich, ist. Der Uebergang zu *ab. infuscata* Stgr. wird durch Exemplare gebildet, bei welchen die helle Mittelbinde bis auf einem einzigen Fleck reducirt ist, eine Form, die gewiss selten vorkommt. Dieser Fleck steht gleich vor der Mitte wie der Mittelfleck in *Hübner's* Fig. 385. Am häufigsten sind aber drei Flecke vorhanden und zwar ein länglicher am Innenrande und je ein runder an der Mitte und auf dem Vorderrande wie die genannte Figur es darstellt. Der Vorderrandsfleck ist der kleinste und fehlt oft ganz.

22. *Larentia badiata* Hb. *ab. subbadiata* Strand n. ab.

Gumppenberg beschreibt das Mittelfeld dieser Art so: «Mittelfeld mit zwei weisslichen Flecken über einander, deren oberer den Mittelpunkt enthält und schwarzbraun eingefasst ist.» Die Form der Mittelbinde, die von *Gumppenberg* hier beschrieben wird, ist aber nicht die gewöhnliche; vielmehr ist die Mittelbinde am meisten der ganzen Länge nach von einer inneren *zusammenhängenden* hellen Binde durchzogen; so ist die Art bei *Hübner* dargestellt, und so sehen die meisten mir bekannten Exemplare aus. Die von *Gumppenberg* beschriebene Form kann demnach nicht als die Hauptform gelten; wenn man sie besonders

bezeichnen will, wozu sie berechtigt sein dürfte, muss sie mit einem Aberrationsnamen belegt werden. Als solchen schlage ich *ab. subbadiata m.* vor. Dieselbe zeichnet sich also dadurch aus, dass das Mittelfeld nicht eine zusammenhängende helle Binde, sondern zwei gesonderte Flecke einschliesst. — Kommt bei Kristiania vor.

Type im hiesigen Museum.

23. *Cymatophora* or *F. ab. fuscostigmata* Strand n. ab.

Von Snaasen befindet sich im Museum eine eigenthümliche Form, die dadurch gekennzeichnet wird, dass die beiden Makeln trübbraun ausgefüllt sind. Die runde Makel ist wenig auffallend, die Nierenmakel dagegen durch ihre dunkle Färbung scharf gegen den lichter Grund abstechend, der Länge nach vom schwarzen Strich durchschnitten. — Ich nenne diese *ab. fuscostigmata m.*

Ab. unimaculata J. Mev. kommt in Norwegen ziemlich häufig vor, wenigstens gehören von den im Museum vorhandenen 19 Exemplaren die 5 dazu. In Schweden ist diese Form nach *Aurivillius* «sällsynt», in Mitteleuropa vielleicht häufiger, wenigstens giebt *Treitschke* an, dass «der innere Fleck oft ganz ausbleibt».

Es scheint als ob die norwegischen Exemplare dieser Art gegen mitteleuropäischer konstante Verschiedenheiten aufweisen. Die Hinterflügel sind heller, einfarbig oder mit höchst undeutlicher dunkler Saumbinde; die Nierenmakel am meisten der ganzen Länge nach von einem schwarzen Strich getheilt; beide Makeln gewöhnlich undeutlicher und selten gelblich, am meisten hellgraulich, ausgefüllt. Die Zeichnungen in der Regel wenig deutlich. Die Grösse weicht

nicht ab, indem norwegische Exemplare meistens 37—39^{mm} messen. — Wegen ungenügendes Vergleichsmateriales kann ich die norwegische Form augenblicklich nicht genau bewerthen, aber es kommt mir vor, dass dieselbe als eine Localvarietät ausgebildet ist. Dieselbe könnte eventuell als *v. norvegica m.* bezeichnet werden.

Unter den Exemplaren des Museum finden sich solche, die *ab. fasciata* Teich angehören. Diese Form, die in *Staudinger-Rebel's* Cataloge nicht Aufnahme gefunden, wurde in «Stettiner entomologischen Zeitung», 1892, und in «Correspondenz-Blatt d. Naturforschers-Vereins zu Riga», 1897, beschrieben.

24. *Spilosoma menthastri* Esp. *ab. unipuncta* Strand n. *ab.*

Diese Form zeichnet sich dadurch aus, dass die Hinterflügel nur mit dem Mittelpunkt versehen sind; sowohl die Punkte am Saume als am Innenwinkel sind verschwunden. Der Mittelpunkt ist aber auch in diesem Falle meistens von gewöhnlicher Grösse. — Bei Kristiania gefunden; im Museum vorhanden.

25. *Diacrisia sanio* L. *ab. moerens* Strand n. *ab.*

Sparre Schneider scheint geneigt zu sein eine eigene norwegische Varietät dieser Art anzunehmen (cfr. «Coleoptera og Lepidoptera ved Bergen» in «Bergens Museums Aarbog», 1901). So weit ich habe herausfinden können, ist dies jedoch nicht der Fall.

Dagegen kommt auch bei uns und vielleicht nicht eben selten eine Aberration vor, die schon von *Ochsenheimer* be-

schrieben wurde. Er sagt darum, dass dieselbe, die weiblichen Geschlechtes ist, «ganz schwarze Hinterflügel und nur am Vorderrande zwey rostgelbe Flecken übereinander hat.» Auch diese Flecken sind aber bei ausgeprägten Exemplaren fast ganz von der schwarzen Grundfarbe verdrängt und zeigen sich nur als kleine unbestimmte Wischen. Auch unter den Männchen finden sich Exemplare, bei welchen die schwarze Färbung sich von der Wurzel bis zum Saume verbreitet, so dass nur ein unbestimmter Wisch am Mittelfleck, sowie die Rippen, heller bleiben. — Für diese Form schlage ich den Namen *ab. moerens m.* vor.

Type im hiesigen Zoologischen Museum.

26. *Endrosa irrorella* Hb. *ab. fumata* Strand n. *ab.*

Im Museum findet sich ein grosses, schönes Männchen dieser Art, das sich dadurch auszeichnet, dass *alle* Flügel graubraun beraucht sind; nur die Flügelränder sind in der Wurzelhälfte schwach gelblich. Rippen und Franzen sind ganz wie die Flügelfläche. Die schwarzen Punkte sind in normaler Anzahl und Anordnung vorhanden; diejenigen der mittleren Reihe sind schwach in die Länge gezogen, jedoch nicht mehr als dass die Breite derselben den Drittel oder Viertel der Länge erreicht. Die Punkte der Hinterflügel kaum angedeutet. Die Flügelexpansion beträgt 32 mm. — In Søndre Aurdal (Valdres) gefangen.

Kristiania, März 1903.

Bind XXV. Hefte 3.

Indhold.

No. 6.	Dr. Elisabeth Stephansen: Von der Bewegung eines Continuums mit einem Ruhepunkte.....	Side 1—30
» 7.	Andreas Holmsen: Dybden af Øieren	» 1—14
» 8.	G. O. Sars: Fresh-Water Entomostraca from China and Sumatra	» 1—44
» 9.	Embr. Strand: Neue norwegische Schmetterlingsformen.....	» 1—24

«Archiv for Mathematik og Naturvidenskab» udkommer med 1 Bind (4 Hefter) aarlig.

Subskriptionsprisen er Kr. 8.00 pr. Bind.

Alb. Cammermeyers Forlag.

7026

ARCHIV

FOR

MATHEMATIK OG NATURVIDENSKAB

UDGIVET

AF

AMUND HELLAND G. O. SARS S. TORUP

FEM OG TYVENDE BIND. FJERDE HEFTE



ST KRISTIANIA

ALB. CAMMERMEYERS FORLAG

1903

Al Korrespondance og Forsendelser vedrørende «Archiv for Mathematik og Naturvidenskab» bedes adresseret til Professor Dr. TORUP, Universitetets fysiologiske Institut, Christiania.

Pour tout ce qui concerne la rédaction et l'administration des «Archiv for Mathematik og Naturvidenskab» s'adresser à M. SOPHUS TORUP, professeur à la Faculté de Médecine. L'Institut Physiologique de l'Université, Christiania, Norvège.

MAR 4 1891

ET PAR THEOREMER

OM LEGEMERS OPSTYKNING I DE SAMME DELE

AF

AXEL THUE



ALB. CAMMERMEYERS FORLAG

Morten Johansens Bogtrykkeri. — Kristiania 1903.

ET PAR THEOREMER OM LEGEMERS OPSTYK- NING I DE SAMME DELE.

AF

AXEL THUE.

§ 1.

Kan to legemer P og Q opdeles i de samme stykker, saa siges de at være lige store.

Vi udtrykker dette ved at skrive:

$$P = Q.$$

Sats 1. Kan et legeme C opstykket i de samme dele som et legeme A og i de samme dele som et legeme B , da kan A og B ogsaa opstykket i de samme dele.

Er med andre ord:

$$A = C \quad \text{og} \quad B = C,$$

da er ogsaa:

$$A = B.$$

Ved en række snitflader α skal jo C kunne opstykket i dele α , som ved ny sammensætning kan give A .

Ligeledes skal C ved en anden række snitflader β kunne opdeles i stykker b , af hvilke man ved sammensætning kan danne B .

Af legemerne a skal vi altsaa ved sammensætning kunne danne baade C og A og af legemerne b baade C og B .

Opdeler vi derfor C i stykkerne c ved en samtidig opstykning efter baade snitfladerne α og β , saa vil i C stykkerne a saavel som stykkerne b være sammensat af stykkerne c .

Af stykkerne c kan man altsaa med andre ord opbygge baade stykkerne a og stykkerne b og som følge heraf ogsaa henholdsvis baade A og B .

A og B kan saaledes, som paastaet, opstykket i de samme dele. *)

Betegner $R_1 R_2 \cdots R_n$ en række saadanne legemer, at:

$$R_1 = R_2 = \cdots = R_{n-1} = R_n,$$

da blir ogsaa

$$R_1 = R_n.$$

Sats 2. Udskjærer man af et legeme P -paa vilkaarlig vis et legeme p og af et med P kongruent legeme Q paa vilkaarlig vis et med p kongruent legeme q , da vil de to restlegemer altid kunne opstykket i de samme dele.

Før vi imidlertid viser, hvorledes opstykningsen kan foretages i det almindeligste tilfælde, skal vi paavise, hvorledes dette kan ske i et par mere specielle.

*) Under omredaktion af nærværende afhandling, som jeg har havt liggende i flere aar, er jeg strax før dens indsendelse til trykning blevet opmærksom paa, at ovenstaaende sats (1) allerede er opstillet og bevist af *Møllerup* i dansk «Nyt tidsskrift for matematik» 1902, 13. aarg., nr. 1--2, pag. 3.

a. Lad R betegne et med P og Q kongruent legeme, og p' og q' to saadanne med p og q kongruente dele af dette, at den figur, som dannes af overfladerne af R og p' blir kongruent med den, som dannes af overfladerne af P og p , og saaledes at den figur, som dannes af overfladerne af R og q' blir kongruent med den, som dannes af overfladerne af Q og q .

Har da i R legemerne p' og q' ingen del fælles, saa vil, som man ser, de to restlegemer kunne opbygges af de samme to dele, af hvilke den ene er kongruent med p og q , medens den anden fremgaar af R ved bortskjæring af legemerne p' og q' .

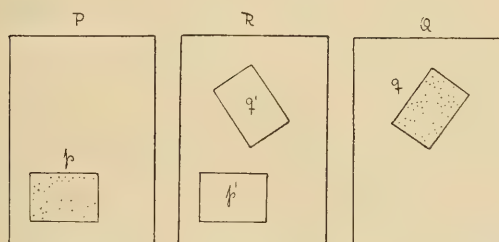


Fig. 1.

b. Lad os saa forudsætte, at p' og q' i R har en del fælles, og at man samtidig af R kan udskjære en med p og q kongruent del r , som helt falder udenfor baade p' og q' .

Efter ovenstaaende vil da det restlegeme $R - r$, som ligger mellem overfladerne af R og r , kunne opstykkes i de samme dele som det restlegeme $P - p$, der ligger mellem overfladerne af P og p .

Videre vil det nævnte legeme $R - r$ ogsaa kunne opdeles i de samme dele som det restlegeme $Q - q$, der ligger mellem overfladerne af Q og q .

Efter sats (1) vil altsaa begge de to restlegemer $P - p$ og $Q - q$ kunne opstykkkes i de samme dele.

Under de givne forudsætninger kan restlegemet $R - p'$ overføres i restlegemet $R - q'$ gennem følgende proces:

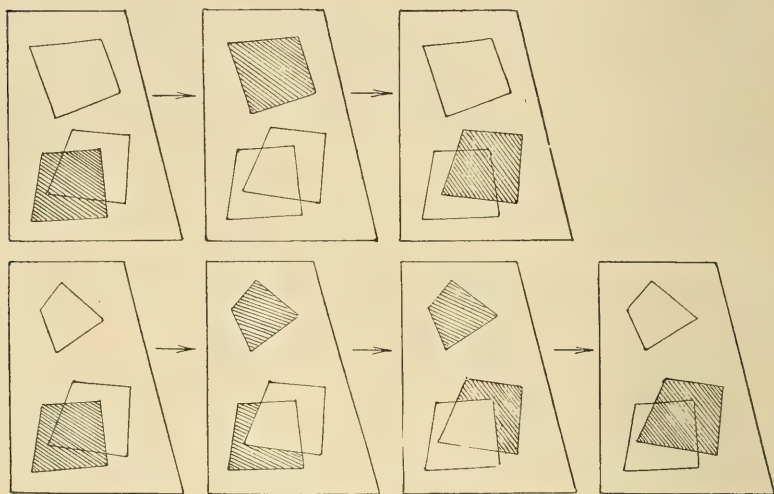


Fig. 2.

Af $R - p'$ udskjæres først udenfor overfladerne af p' og q' et med disse kongruent legeme r , som derpaa anbringes i hulrummet p' .

Ved da af det erholdte restlegeme $R - r$ at udskjære legemet q' og ved derpaa at anbringe dette i hulrummet r , erholdes saa det søgte restlegeme $R - q'$.

De to restlegemer $P - p$ og $Q - q$ kan altsaa begge opbygges af de fire dele, hvori $R - r$ opdeles ved overfladerne af p' og q' .

Den ene af disse dele blir det stykke af $R - r$, som helt falder udenfor baade p' og q' , den anden del blir det fælles parti af disse, og de to øvrige dele blir endelig de resterende dele af p' og q' .

$R - p'$ eller $P - p$ kan ogsaa overføres i $R - q'$ eller $Q - q$, saafremt man af R udenfor overfladerne af baade p' og q' kan udskjære et stykke δ' , som er kongruent med det fælles parti δ for p' og q' .

Først kan vi nemlig af $R - p'$ udenfor overfladerne af p' og q' udskjære en med disses fælles parti kongruent del δ' , som derpaa kan anbringes i den del af hulrummet p' , som udgjør det nævnte fælles parti δ for p' og q' .

Af det erholdte legeme kan vi saa udskjære q' og derpaa opdele dette legeme i to dele δ'' og $q' - \delta''$, som henholdsvis er kongruente med de to dele δ og $p' - \delta$, hvori overfladen af q' deler p' .

Anbringes da δ'' i hulrummet δ' og $q' - \delta''$ i hulrummet $p' - \delta$, saa blir det erholdte legeme identisk med restlegemet $R - q'$ eller $Q - q$.

Som man strax ser, vil restlegemerne $P - p$ og $Q - q$ kunne opbygges af de samme dele, saafremt dette er tilfælde med de to restlegemer $p' - \delta$ og $q' - \delta$, som fremgaar af p' og q' , om deres fælles parti δ bortskjæres af begge.

Opdeles nemlig stykket $q' - \delta$ af restlegemet $R - p'$ i de nævnte dele og sammensættes disse atter til et med hulrummet $p' - \delta$ kongruent legeme, som derpaa anbringes i nævnte hulrum, saa fremkommer restlegemet $R - q'$.

Vi skal senere paavise, hvorledes man ved successive anvendelse af det her anførte raisonnement kan faa satsen bevist i det mest almindelige tilfælde.

Har den del af R , som helt falder udenfor baade p' og q' et større volum end det fælles parti δ for p' og q' , saa vil man ogsaa i dette tilfælde kunne give et simpelt bevis for, at $P - p$ og $Q - q$ kan deles i de samme dele.

Af det parti af R , som helt falder udenfor baade p' og q' , maa man jo da kunne udskjære en række smaa-legemer s , som ved sammensætning vil kunne bringes til helt at udfylde delen δ af tømrummet p' i restlegemet $R - p'$.

Af det erholdte legeme kan man saa udskjære legemet q' og derpaa opstykke dette igjen i to med rummene δ og $p' - \delta$ kongruente dele α og β . Opstykket α i en række med legemerne s kongruente dele og anbringes disse derpaa i de tilsvarende hulrum s , og β i hulrummet $p' - \delta$, saa er herved $R - p'$ overført i $R - q'$.

e. Vi skal saa bevise, at det opstillede theorem har almindelig gyldighed.

Bortskjærer vi fra et legeme P en vilkaarlig del p og fra et med P kongruent legeme Q en med p kongruent del q , saa skal vi altsaa paavise, at de to erholdte rest-legemer, som vi som før kan betegne med $P - p$ og $Q - q$, vil kunne deles i de samme stykker.

Lad R betegne et med P og Q kongruent legeme og p_1 og q_1 de dele af samme, som henholdsvis vil falde sammen med p og q , om R bringes til at falde sammen med henholdsvis P og Q .

Lad videre $q_2, q_3, \dots$ og $p_2, p_3, \dots$ være de dele af henholdsvis q_1 og p_1 , som er defineret derved, at q_{n+1}

for helt positivt n skal betegne den del af q_n , som er fælles for q_n og p_n , medens p_{n+1} skal betegne den del af p_n , som vil falde sammen med stykket q_{n+1} af q_n , naar p_n bringes til at falde sammen med q_n .

Bringes følgelig p_1 til at falde sammen med q_1 , saa vil alle delene $p_2, p_3, \dots$ af p_1 herunder falde sammen med de tilsvarende dele $q_2, q_3, \dots$ af q_1 .

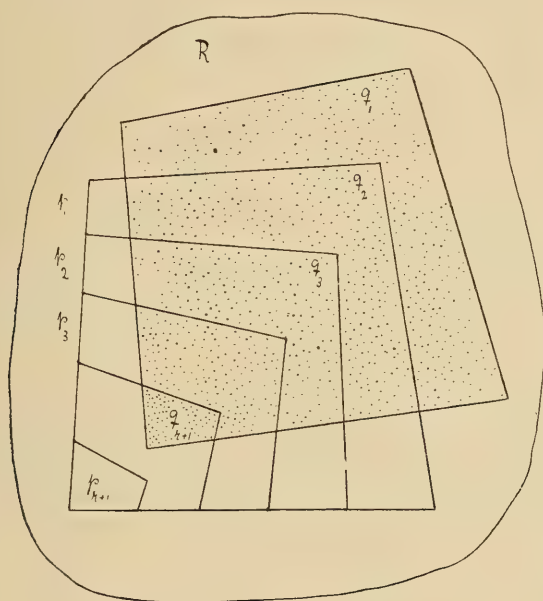


Fig. 3.

Skyver man p_1 og q_1 saaledes sammen, at de dækker hinanden, saa vil ogsaa herunder for hvert helt m den del $p_m - p_{m+1}$ af p_m , som falder udenfor p_{m+1} , dække den del $q_m - q_{m+1}$ af q_m , som falder udenfor q_{m+1} .

Har nu p_n og q_n en fælles del q_{n+1} for alle hele værdier af n fra og med 1 til og med r , medens p_{r+1} og q_{r+1} ligger helt udenfor hinanden, da kan restlegemerne $R - p_1$

og $R - q_1$ og altsaa ogsaa $P - p$ og $Q - q$ deles i de samme stykker.

Restlegemet $R - q_1$ kan nemlig overføres i restlegemet $R - p$ paa følgende vis:

Stykket p_{r+1} af R eller p_1 udskjæres og anbringes i hulrummet q_{r+1} af q_1 . Af det erholdte legeme R_1 med hulrummet p_{r+1} udskjærer man saa stykket $p_r - p_{r+1}$ og anbringer det i hulrummet $q_r - q_{r+1}$. Af det saaledes erholdte legeme R_2 med hulrummet p_r udskjærer man derpaa stykket $p_{r-1} - p_r$, som anbringes i hulrummet $q_{r-1} - q_r$.

Fortsætter man saa paa denne vis, erholdes sluttelig restlegemet $R - p_1$.

Havde p_n og q_n for alle hele værdier for n fra og med 1 til og med r en fælles del q_{n+1} , og volumet af q_{r+1} var mindre end volumet af den del af R , som helt ligger udenfor baade p_1 og q_1 , da lod $R - p_1$ og $R - q_1$ sig ogsaa opstykke i de samme dele.

Først kan vi jo af $R - q_1$ udenfor baade p_1 og q_1 udskjære en række smaalegemer s , hvoraf man ved sammensætning kan danne et med q_{r+1} kongruent legeme α , som derpaa blev at anbringe i nævnte hulrum q_{r+1} af hulrummet q_1 .

Derpaa kunde man af det erholdte legeme R_0 med hulrummene s udskjære stykket p_r , som saa kunde anbringes i hulrummet q_r . Af det erholdte legeme R_1 kunde man saa videre udskjære det med α kongruente stykke q_{r+1} , som efter at være opdelt i stykkerne s , nu kunne anbringes i de hermed kongruente hulrum.

Af det saaledes fremkomne legeme R_2 med hulrummet p_r kunne vi saa udskjære stykket $p_{r-1} - p_r$, som derpaa blev at placere i hulrummet $q_{r-1} - q_r$.

Ved nu at fortsætte som ovenfor fik man sluttelig $R - q_1$ overført i $R - p_1$.

Vi skal saa give ovenstaaende raisonnement en noget almindeligere form, idet vi samtidig vil godtgjøre, at satsen fremdeles bevarer sin gyldighed, selv om q_n med voxende n nærmer sig mod et bestemt grænselegeme.

Lad $\dots r_x, r_{x+1}, r_{x+2}, \dots$ betegne en saadan række af uendelig mange med p og q kongruente legemer r , at r_n og r_{n+1} for hvert helt n vil danne en figur, som er kongruent med den, der i R dannes af p_1 og q_1 .

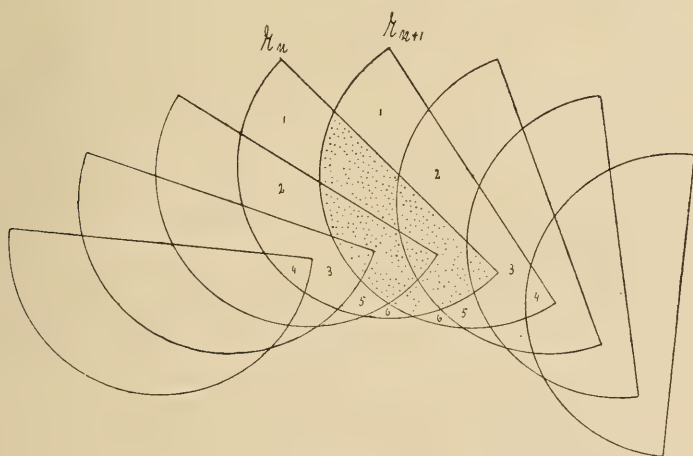


Fig. 4.

Har nu r_x og r_{x+y} for ethvert helt x ikke nogen fælles del, naar y er større end en vis opgiven størrelse, saa vil hvert af legemerne r ved overfladerne af alle de andre kun blive delt i et begrænset antal stykker.

Da den af overfladerne til legemerne r hørende figur ikke undergaar nogen forandring, om man for hvert x lader overfladen af r_x falde sammen med overfladen for

r_{n+1} , saa vil følgelig hvilkesomhelst to af legemerne r ved de nævnte flader blive delt i de samme dele.

De restlegemer, som blir igjen af r_n og r_{n+1} , naar deres fælles parti, som i begge legemer bestaar af de samme dele, fjernes fra begge, maa altsaa ogsaa bestaa af de samme dele.

I $R - p_1$ kan man altsaa opstykke det parti af q , som helt ligger udenfor p_1 , i dele, hvoraf man ved ny sammensætning helt kan udfylde den del af hulrummet p_1 , der falder udenfor q_1 .

Herved er da $R - p_1$ overført i $R - q_1$ eller $P - p$ i $Q - q$.

For at faa opstykket i de samme dele de partier, som blir igjen af r_n og r_{n+1} , naar deres fælles del udskjæres af begge, er det selvsagt kun nødvendigt at skjære r_n og r_{n+1} med overfladerne til alle de af legemerne r , som har et fælles parti med en af dem.

De øvrige uendelig mange af legemerne r i ovennævnte uendelige række kan man derfor helt udelade, da deres overflader hverken skjærer r_n eller r_{n+1} .

Som man ser, gjælder ovenstaaende raisonnement lige godt, selv om p og q ikke er kongruente i vanlig forstand og altsaa ikke kan bringes til dækning ved bevægelse i det tre-dimensionale rum. Fremgangsmaaden blir da ogsaa fremdeles rigtig, naar blot q ved bevægelse i det tre-dimensionale rum kan bringes til at dække speilbilledet for p med hensyn paa et vilkaarligt plan.

Vi skal saa nærmere udlede betingelsen for, at to af legemerne r vil falde helt udenfor hinanden.

Kan r_n ved bevægelse i det tre-dimensionale rum bringes til at falde sammen med r_{n+1} , saa findes der en ret

linie L , som med r_n danner den samme figur som sammen med r_{n+1} .

Ved den før nævnte række legemer r vil der altsaa existere en ret linie L , som danner den samme figur med alle disse.

Bevæges rækken som et uforanderligt legeme gennem en spiralbevægelse fra en stilling til en ny, saaledes at r_n for hvert helt n vil falde sammen med r_{n+1} i sin første stilling, da vil herunder den med legemerne r fast forbundne linie L blot forskyves langs sig selv.

De to paa L lodrette planer, som tangerer r_n og omslutter samme, vil følgelig faa en afstand k , der ikke varierer med n .

Er α_n og β_n disse to planer og α_{n+1} og β_{n+1} de to tilsvarende for legemet r_{n+1} , saaledes at α_n falder sammen med α_{n+1} og β_n sammen med β_{n+1} , naar r_n bringes til at falde sammen med r_{n+1} , da vil hvert r i rækken, naar afstanden h mellem α_n og α_{n+1} eller mellem β_n og β_{n+1} er større end nul, kun skjæres af overfladerne til et begrændset antal af de øvrige legemer r .

Da nemlig afstanden mellem α_x og α_{x+y} overalt er lig yh , saa vil jo r_x , som man strax ser, ikke skjæres af overfladen for noget r_{x+y} , hvori

$$y > \frac{k}{h}.$$

I dette tilfælde lod altsaa, som før paavist, legemerne $P-p$ og $Q-q$ sig opdele i de samme stykker.

Var $h=0$, saa kunne rækken af legemerne r ved en rotation om L lade sig bringe i en saadan ny stilling, at r_n for hvert helt n kom til at indtage samme plads som r_{n+1} før rotationen.

Stod i det her nævnte tilfælde den tilsvarende rotationsvinkel i et rationalt forhold til en hel omdreining, saa indeholdt den ubegrændsede række af legemerne r kun et begrændset antal saadanne.

Hvert af legemerne r blev da ved overfladerne til de andre opdelt i et endeligt antal dele, som blev de samme for alle de nævnte legemer.

Ogsaa her maatte da $P - p$ og $Q - q$ lade sig opdele i de samme stykker.

Var $h = 0$, saa vilde dette ogsaa blive tilfælde, om de tidligere indførte legemer p_n og q_n for et vist n helt faldt udenfor hinanden, eller saafremt q_n for et vist n fik et volum, som var mindre end volumet af den del af R , som helt ligger udenfor baade q_1 og et vilkaarligt p_m .

Nærmede q_n , naar nævnte forhold var irrationalt, sig her med voxende n mod et grændselegeme Q , saa maatte dette danne den samme figur med baade p_1 og q_1 .

Betegnede da p'_n og q'_n de kongruente restlegemer, som fremkom ved fra henholdsvis p_n og q_n at bortskjære deres fælles parti Q , saa nærmede volumet af q'_n sig med voxende n mod nul.

Efter et tidligere raisonnement maatte da de dele af restlegemerne p'_1 og q'_1 , som ligger udenfor deres fælles parti Q'_2 , kunne opstykket i de samme dele og altsaa ogsaa de partier af p_1 og q_1 , som ligger udenfor disses fælles parti Q_2 .

Hermed er det opstillede theorem fuldstændig bevist.

d. Vi skal saa gennem et nyt raisonnement i store træk atter paavise, at sats (2) har almindelig gyldighed.

Idet p og q er to kongruente legemer, som altsaa ved bevægelse i det tre-dimensionale rum kan bringes til dækning, saa skal vi bevise, at det parti af p , som ligger helt udenfor q , kan deles i de samme stykker som det parti af q , der helt ligger udenfor p .

Som før nævnt findes der jo to sammenfaldende rette linier L_p og L_q , saaledes at den af p og L_p dannede figur blir kongruent med den, som dannes af q og L_q .

Den første af disse figurer kan følgelig bringes til at falde sammen med den anden ved en rotation af p om L_p , samtidig med at denne linie forskyves langs sig selv med en hastighed, som staar i et konstant forhold til hastigheden i nævnte rotationsbevægelse.

Ved den her nævnte bevægelse vil ethvert punkt af p beskrive en spirallinie, som kan forskyves langs sig selv.

Disse spiraler vil blive rette linier eller cirkler, alt eftersom p henholdsvis vil kunne overføres i q ved en translation eller rotation.

Ethvert med p fast forbundet spiralerør, som ved ovennævnte bevægelse vil forskyves langs sig selv, maa følgelig af p og q udskjære kongruente dele.

Tænker vi os en paa L_p lodret og med p fast forbunden plan flade, som er opdelt i vilkaarlige smaadele, saa vil disses omkredse under nævnte bevægelse beskrive spiralerør, som opstykker p og q i de samme kongruente dele.

Sats (2) er saaledes bevist, om man blot kan godtgjøre, at satsen mere specielt gjælder for de i hvert spiralerør beliggende kongruente dele af p og q , eller at vi med andre ord kan dele i de samme stykker de partier af disse dele, som falder udenfor deres fælles del.

For kortheds skyld skal vi som nævnt nøie os med et ufuldstændigt bevis for satsen, idet vi vil forudsætte, at p ikke kan overføres i q ved en udelukkende rotation af p om L_p , og at hver af de nævnte spirallinier skjærer hver af legemerne p og q 's overflader i det høieste blot i to punkter.

For nu at bevise satsen lægger vi først gennem skjæringskurven mellem overfladerne af p og q et spiralerør, som vil forskyves langs sig selv ved nævnte bevægelse.

Røret vil under bevægelsen af p beskrives af den nævnte skjæringskurve.

De dele af p og q , som falder udenfor dette rør, falder da ogsaa udenfor de to legemers fælles del og blir desuden kongruente.

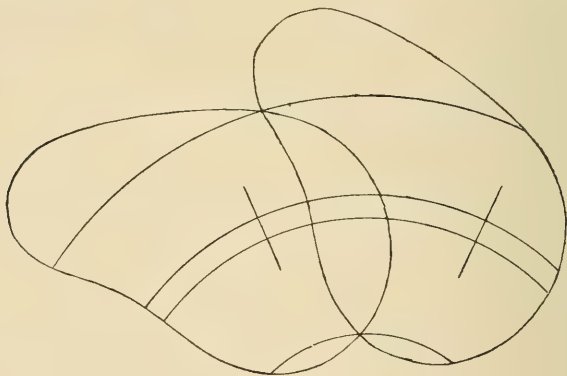


Fig. 5.

Vi tænker os saa de indenfor spiralerøret beliggende dele af p og q opdelt i parvis kongruente dele ved de spiralerør, som under p 's bevægelse beskrives af omkredsene for de dele, som erholdes ved en vilkaarlig opstykning af den ved overfladen af q udskaarne del af overfladen af p .

Vi kan da give alle disse spiralerør saa smaa tværsnit, at hver af de to dele a og b , som et hvilket som helst af de sidstnævnte rør udskjærer af p og q , vil kunne deles i to dele ved et paa axerne L lodret plan, som hverken skjærer de to deles fælles parti eller de dele af deres overflader, som ogsaa tilhører p og q .

Den del af a , som ligger udenfor b (og ligesaa den del af b , som ligger udenfor a), er foruden af rørfladen begrændset af to kongruente flader.

Deles nu nævnte del af a i to dele ved et paa axerne L lodret plan af før omtalte art, saa vil de to dele kunne skyves saaledes sammen til et nyt legeme, at de nævnte to kongruente flader falder sammen. Da det erholdte legeme blir kongruent med det, der gennem samme fremgangsmaade kan erholdes af den del af b , som ligger udenfor a , saa maa altsaa ifølge sats (1) de nævnte to dele af a og b kunne deles i de samme stykker.

Det samme maa følgelig ogsaa gjælde de partier af p og q , som falder udenfor deres fælles del.

Kunde p overføres i q ved en rotation om L_p , gik spiralerørene over i ringformige rør.

I dette tilfælde overskar man rørene eller legemerne a og b ved plane snit gennem axerne L , og beviset blev som før.

Udskjærer man altsaa til ex. af et vilkaarligt tetraeder en med samme lignedannet del t ved et med en af sidefladerne parallelt plan, da vil det erholdte restlegeme kunne deles i de samme stykker som det restlegeme, der erholdes ved fra tetraedret ved et med et af de andre sideflader parallelt plan at bortskjære en med t kongruent del.

§ 2.

Sats 3. Kan to legemer P og Q deles i de samme — parvis kongruente — dele og ligesaa to legemer p og q , og man saa af P udskjærer et med p kongruent legeme og af Q et med q kongruent legeme, da kan de to restlegemer ogsaa opdeles i de samme parvis kongruente stykker.

Lad os først bevise satsen under den forudsætning, at P og Q er kongruente.

Var da P et sammenhængende legeme, som altsaa ikke bestod af adskilte dele, saa kunne de dele, hvoraf p var sammensat, yderligere opstykket i saadanne smaadele α , at disse gennem en kontinuerlig bevægelse indenfor overfladen af P kom til at danne en figur, som sammen med P blev kongruent med den, som dannes af Q og q .

Overføringen af delene α fra den ene stilling til den anden lod sig desuden udføre gennem en saadan række successive forskyvninger, at ved hver af disse kun en eneste af delene α ad gangen blev flyttet.

Enten nu P var et enkelt sammenhængende legeme eller ikke, saa kunne vi tænke os en række med P og Q kongruente legemer $R_1 R_2 \dots R_n$ med saadanne tilsvarende hulrum $r_1 r_2 \dots r_n$, at hvert r lod sig opbygge af de samme dele α , som stykkerne af p og q .

Videre kunne stykkerne α være valgt saa smaa og hulrummene r være lagt saaledes, at restlegemerne $P-p$ og R_1-r_1 blev kongruente og ligesaa restlegemerne $Q-q$ og R_n-r_n , medens hvert R_x-r_x lod sig overføre i $R_{x+1}-r_{x+1}$ ved flytning af blot en eneste af delene α .

Da altsaa hvert restlegeme $R_x - r_x$, ifølge sats (2), lader sig opdele i de samme stykker som restlegemet $R_{x+1} - r_{x+1}$, saa maa efter sats (1) det samme ogsaa gjælde restlegemerne $R_1 - r_1$ og $R_n - r_n$ eller restlegemerne $P - p$ og $Q - q$.

Lad os saa bevise satsen under forudsætning af at p og q er kongruente.

Vi tænker os i denne anledning P og Q henholdsvis omgivne af to saadanne kongruente flader A og B , at den figur, som dannes af B og q , blir kongruent med den, som dannes af A og p .

Efter hvad vi ovenfor netop har bevist, vil da det legeme, som ligger mellem A og overfladen af P kunne opstykkes i de samme dele β , som det legeme, der ligger mellem B og overfladen af Q .

Det restlegeme $P - p$, som fremkommer, naar man fra legemet med overfladen A bortskjærer p og delene β , maa da ogsaa efter hvad ovenfor er bevist, kunne lade sig dele i de samme stykker som det restlegeme $Q - q$, der fremkommer ved fra legemet med overfladen B at bortskjære q og de udenfor Q beliggende stykker β .

Idet legemerne P og Q kan deles i de samme dele, gjælder det nu sluttelig blot at bevise, at det restlegeme P_1 , som erholdes af P ved fra samme paa vilkaarlig vis at bortskjære en række legemer $r_1 r_2 \dots r_n$, altid kan deles i de samme dele som det restlegeme Q_1 , der staar igjen, naar man fra Q paa vilkaarlig vis udskjærer en række med legemerne r kongruente legemer $s_1 s_2 \dots s_n$, hvor s_x for hvert x er kongruent med r_x .

Efter hvad vi ovenfor har paavist, gjælder denne sats for $n = k + 1$, naar den gjælder for $n = k$, hvor k er et helt positivt tal.

Da den, efter hvad før er godtgjort, gjælder for $n=1$, har den saaledes almindelig gyldighed.

Betegner man altsaa med $R-r$ det restlegeme, som staar igjen, om man fra et legeme R udskjærer en del r , da har vi med den tidligere betydning af lighedstegnet, at:

$$\begin{aligned} P-p &= Q-q, \\ \text{saafremt} \quad P &= Q \quad \text{og} \quad p = q. \end{aligned}$$

Er i sats (2) hvert af legemerne P og Q eller hvert af legemerne p og q ikke kongruent med det andet i vanlig forstand, men kongruent med det andet legemes speilbillede med hensyn til et vilkaarligt plan, da vil satsen, som vi ved et eksempel skal godtgjøre, fremdeles kunne være rigtig.

Ved denne undersøgelse kan vi da mærke os, at hvis hvert af to legemer med given indbyrdes stilling er kongruent med det andet legemes speilbillede, da findes der i nævnte stilling et plan, som med hvert af legemerne danner en figur, som er kongruent med speilbilledet af den, som planet danner med det andet legeme.

Videre findes en paa planet lodret linie med samme egenskab. Ved at lade legemerne rotere om denne linie kan hvert legeme bringes til at blive det andet legemes speilbillede med hensyn paa nævnte plan.

Dette plan danner det geometriske sted for midtpunkterne af forbindelseslinierne mellem de to legemers sammenhørende punkter.

Havde man nu en række saadanne legemer

$$\dots R_1 R_2 R_3 \dots,$$

at R_{x+1} var kongruent med speilbilledet af R_x , medens den figur, som dannedes af R_{x+1} og R_{x+2} blev kongruent

med den, som dannedes af R_x og R_{x+1} , da fandtes der et plan, som halverede forbindelseslinierne mellem de tilsvarende punkter for hvilkesomhelst to paa hinanden følgende af legemerne R .

Gjennem en rotation af nævnte række om en paa dette plan lodret axe kunne man samtidig for alle hele værdier af x bringe hvert R_x til at fylde samme rum, som R_{x+2} før rotationen.

Vi kunde saa anvende samme raisonnement som i § 1 c.

Som før sagt, skal vi imidlertid for kortheds skyld nøie os med blot at gennemføre beviset i et enkelt tilfælde, i hvilket vi mere specielt vil behandle plane flader istedenfor legemer.

Sats 4. Har man i et plan U to vilkaarlige flader P og Q , som ved forskyvning i planet kan bringes til at dække hinanden, og man da af P udskjærer en vilkaarlig del p og af Q en vilkaarlig del q , som ved forskyvning i planet kan bringes til at dække speilbilledet af p med hensyn til en i planet beliggende ret linie, da vil de to restflader $P-p$ og $Q-q$ kunne opbygges af de samme dele.

De to restflader vil kunne overføres i hinanden ved en bevægelse af de nævnte dele i eller udenfor planet U .

For at bevise dette tænker vi os i et plan en saadan række med p og q kongruente flader

$$\dots R_x R_{x+1} R_{x+2},$$

at R_x og R_{x+1} for hvert x kommer til at danne samme figur som hulrummene p og q i P og Q , naar disse bringes til at dække hinanden.

Der findes da en ret linie L i planet, som for hvert helt x halverer forbindelseslinierne mellem de tilsvarende punkter af R_x og R_{x+1} og som med alle disse flader danner den samme figur.

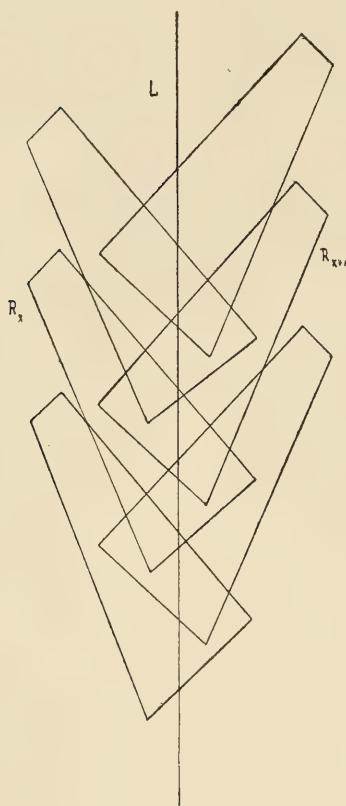


Fig. 6.

Det samme gælder ogsaa de partier af R_x og R_{x+1} , som ligger udenfor deres fælles del.

Falder de to par perpendikulærer ikke sammen, saa vil i lighed med, hvad før er vist, hvert R_x kun skjæres af omkredsene til et begrændset antal af fladerne R .

Den figur, som dannes af L og R_x , kan ved forskyvning i nævnte plan for hvert x bringes til at dække den, som dannes af L og R_{x+2} .

Videre kan den figur, som dannes af L og R_x , ved forskyvning i planet bringes til at dække speilbilledet med hensyn til en linie i dette for den figur, som dannes af L og R_{x+1} .

Som man ser, blir afstanden k mellem de to paa L lodrette linier i planet, som tangerer og omslutter R_x , lig afstanden mellem de tilsvarende linier ved R_{x+1} .

Falder de nævnte linier ved R_x og R_{x+1} sammen, saa vil hver af disse blive den andens speilbillede med hensyn paa L .

Da man ved omlægning af den af fladerne R dannede figur kan bringe hvert R_x til at falde sammen med R_{x+1} i denne flades første stilling, saa maa R_x ved nævnte opstykning for hvert x blive delt i de samme stykker som R_{x+1} .

Hver af disse dele i R_x kan ved forskyvning i planet bringes til at dække speilbilledet med hensyn til L for den tilsvarende del af R_{x+1} .

Da den del, som udskjæres af R_x ved omkredsen af R_{x+1} , ved overnævnte opstykning blir delt i de samme dele som den del af R_{x+1} , der udskjæres ved omkredsen af R_x , saa maa følgelig de resterende dele af R_x og R_{x+1} , og som falder udenfor disses fælles parti, ved omkredsene af fladerne R ogsaa blive delt i de samme stykker.

Herved er da satsen bevist.

Med hensyn til fladers opstykning i de samme dele kunne vi bemærke, at sfæriske polygoner paa samme kugleflade og med ligestore arealer altid vil kunne opstykkes i de samme dele.

Det samme gjælder ogsaa retvinklede parallelepipeder med ligestore volumer.

§ 3.

Kan en gruppe legemer af en vis klasse definere et udtryk, som ikke ændres, om gruppen ved opstyknings af en vis art opdeles i flere og mindre dele, da vil to saadanne grupper ved slige opstyknings ikke kunne deles i de samme stykker, saafremt det til hver af de to grupper hørende udtryk af nævnte slags ikke er det samme i begge.

Vi skal give et par eksempler herpaa.

Sats 5. Opdeler man en gruppe af polyedre ved successive opstykningsplaner i mindre og mindre dele, idet et af polyederne ved hver enkelt opstykning blir delt i to dele ved et plan, som ikke indeholder nogen af polyedrets sidekanter, da vil summen $\sum s \cos \varphi$ af de produkter, som erholdes, om hver sidekant s multipliceres med cosinus til sin tilsvarende bøjningsvinkel φ , i alle de dannede grupper faa samme værdi som i den givne.

Da man strax kan indse, at summen forblir uforandret ved hver enkelt opstykning af nævnte art, ansees satsen hermed for at være bevist.

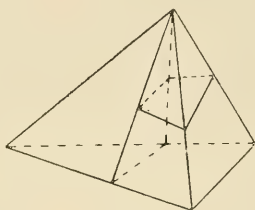


Fig. 7.

Da ovennævnte sum blir lig nul for et retvinklet parallelepiped og til ex. lig $2s$ for et regulært tetraeder, hvis sidekant er lig s , saa kan de to legemer ved nævnte opstykningsmaade aldrig deles i de samme dele.

Sats 6. Sætter man en række polyedre saaledes sammen til et større polyeder P , at hver sideflade i hvert af de smaa polyedre enten falder frit eller fuldstændig sammen med en af sidefladerne til en af de andre, da faar man i hele tal h og k :

$$h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 + \dots + h_n\alpha_n = S - 2Rk,$$

hvor $a_1 \dots a_n$ er bøjningsvinklerne i P og S summen af bøjningsvinklerne i alle de smaa polyedre tilsammen.

Falder nemlig en sidekant til en af de smaa polyedre helt inde i P , da er summen af de til siden hørende bøjningsvinkler i de smaa polyedre, for hvilke siden er fælles, lig $4R$.

Falder siden derimod i en af sidefladerne til polyedret P , saa blir angjældende sum lig $2R$.

Falder den endelig i en af det store polyeders sidekanter, saa blir summen lig den til angjældende sidekant hørende bøjningsvinkel i det store polyeder.

Kan følgende to polyedre paa den her nævnte maade opbygges af de samme polyedriske dele, da findes der saadanne hele tal p , q og r , at

$$[p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n] - [q_1 \beta_1 + q_2 \beta_2 + \dots + q_m \beta_m] = 2Rr$$

eller

$$\text{tg} [p_1 a_1 + \dots + p_n a_n] = \text{tg} [q_1 \beta_1 + \dots + q_m \beta_m],$$

hvor størrelserne a betegner bøjningsvinklerne i det ene polyeder og størrelserne β bøjningsvinklerne i det andet.

Sats 7. Et retvinklet parallelepiped og et regulært tetraeder kan ikke paa nysnævnte vis opstykes i de samme polyedriske dele.

Lod nemlig dette sig gjøre, og φ var bøjningsvinkelen i tetraedret, saa fik man i hele tal n og m :

$$m\varphi = nR \quad (1)$$

Efter dette blev altsaa $\text{tg } m\varphi$ lig nul eller uendelig stor.

Idet man her har:

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt[4]{8},$$

vil vi mere almindelig bestemme de vinkler φ , for hvilke $\operatorname{tg} m\varphi$ kan blive nul eller uendelig ved hele værdier af $m > 0$, samtidig med at:

$$h \operatorname{tg} \varphi^2 = k, \quad (2)$$

hvor h og k er to positive indbyrdes primtal.

Da $h = k = 1$ giver

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \infty \quad \text{og} \quad \operatorname{tg} 4\varphi = 0,$$

vil vi bortse fra dette tilfælde.

Da videre

$$\operatorname{tg} (R - \varphi) = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi},$$

medens

$$\operatorname{tg} 4m(R - \varphi) = \operatorname{tg} 4m\varphi = 0,$$

naar $\operatorname{tg} m\varphi$ er lig nul eller uendelig, saa vil vi forudsætte, at:

$$k > h.$$

Sættes:

$$\operatorname{tg} m\varphi = U_m \operatorname{tg} \varphi, \quad (3)$$

saa faaes:

$$\operatorname{tg} (n+1)\varphi = U_{n+1} \operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} n\varphi}{1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} n\varphi} = \frac{\operatorname{tg} \varphi + U_n \operatorname{tg} \varphi}{1 - U_n \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

eller

$$U_{n+1} = \frac{h(1 + U_n)}{h - k U_n} \quad (4)$$

Da $U_1 = 1$, saa blir hvert U rationalt.

Sætter vi definitions­mæssig:

$$P_1 = 1, \quad Q_1 = 1 \quad (5)$$

$$P_{n+1} = h(Q_n + P_n) \quad (6)$$

$$Q_{n+1} = hQ_n - kP_n, \quad (7)$$

saa blir alle P og Q hele tal, og man faar:

$$U_n = \frac{P_n}{Q_n}. \quad (8)$$

Vi bemærker her strax, at intet Q kan blive delelig med nogen faktor i k .

Var nemlig saa tilfælde med til ex. Q_m , saa kom efter (7) det samme ogsaa til at gjælde for Q_{m-1} og følgelig ogsaa for $Q_1 = 1$.

Intet Q_n kan saaledes blive lig nul og intet U_n uendelig stort for nogen hel værdi af n , naar $k > h$.

Af (4) faaes:

$$U_n(h + kU_{n+1}) = h(U_{n+1} - 1).$$

Da U_n ikke er uendelig, saa kan $h + kU_{n+1}$ ikke blive nul, da man jo i saa fald fik $U_{n+1} = 1 = -\frac{h}{k}$.

Vi har derfor for alle hele værdier af n :

$$(-U_n) = \frac{h[1 + (-U_{n+1})]}{h - k(-U_{n+1})}. \quad (9)$$

Var nu p den mindste fra 0 forskjellige værdi af n , for hvilken man fik:

$$U_n = 0,$$

saa erholdt man af (4) og (9)

$$U_q + U_{p-q} = 0. \quad (10)$$

Gjælder nemlig denne ligning for $q = m$, eller har man:

$$U_m + U_{p-m},$$

saa faaes ogsaa:

$$-U_{p-(m+1)} = \frac{h[1 + (-U_{p-m})]}{h - k(-U_{p-m})} = \frac{h[1 + U_m]}{h - kU_m} = U_{m+1}$$

eller

$$U_{m+1} + U_{p-(m+1)} = 0.$$

Da $U_0 = 0$, og (10) saaledes gjælder for $m = p$, maa ligningen altsaa have almindelig gyldighed.

Var følgende $p = 2r$, saa blev

$$U_r = 0,$$

hvilket er umuligt, da $r < p$.

p maa altsaa være et ulige tal.

Sættes $p = 2r + 1$, saa faaes:

$$U_r + U_{r+1} = 0$$

eller

$$U_r + \frac{h[1 + U_r]}{h - kU_r} = 0$$

eller

$$kU_r^2 - 2hU_r - h = 0$$

eller endelig:

$$U_r = \frac{h \pm \sqrt{h(h+k)}}{k}. \quad (11)$$

Da h og $h+k$ er indbyrdes primtal, medens U_r er rational, saa kan man sætte:

$$h = a^2 \quad \text{og} \quad h + k = b^2,$$

hvor a og b er to positive indbyrdes primtal.

Videre faaes:

$$U_r = \frac{a^2 \pm ab}{b^2 - a^2} = \frac{-a}{a \mp b} = \frac{a}{b \pm a}.$$

Da a og $b \pm a$ er indbyrdes primtal, medens nævneren i U_r mest mulig forkortet, som før paavist, ikke er deleligt med noget primtal, som gaar op i k , saa maa:

$$b \pm a = b - a = 1$$

eller

$$b = a + 1.$$

Da imidlertid $k > h$, saa blir

$$b^2 - a^2 > a^2$$

eller

$$(a + 1)^2 > 2a^2$$

eller

$$(a - 1)^2 < 2.$$

a kan altsaa ikke have andre værdier end 1 og 2.

Vi kommer saaledes til de to alternativer:

$$k = 3, \quad h = 1$$

og

$$k = 5, \quad h = 4.$$

Sættes $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{5}{4}}$, faaes

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \operatorname{tg} \psi = -\sqrt{80}.$$

Var derfor $\operatorname{tg} n\varphi = 0$ eller ∞ , saa blev

$$\operatorname{tg} 2n\varphi = \operatorname{tg} n\psi = 0.$$

Da imidlertid 80 er forskjellig baade fra $\frac{3}{1}$ og $\frac{5}{4}$, saa er herved det sidste alternativ udelukket.

Er altsaa $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{N}$, hvor N er en rational størrelse, saa kan $\operatorname{tg} n\varphi$ da og kun da blive 0 eller ∞ , naar N har en af værdierne:

$$0, \quad 1, \quad 3 \quad \text{eller} \quad \frac{1}{3}.$$

Dette er altsaa de eneste rationale værdier af N , saafreimt φ , i ligningen:

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = N,$$

skal blive en rational del af π .

Da 8 er forskjellig fra alle disse 4 tal, saa er hermed vor sats bevist.

Til dette resultat kunde vi ogsaa være komne ad en anden vei.

Er p og q to indbyrdes primtal, af hvilke det sidste ikke er nogen potens af 2, og $\cos \varphi = \frac{p}{q}$, da kan vi bevise, at $\cos m\varphi$ ikke kan blive lig 1 for nogen fra nul forskjellig hel værdi af m .

I modsat fald fik man nemlig ogsaa:

$$\cos 4m\varphi = 1.$$

Sættes $4m = n$, saa erholdt man ligningen

$$2^{n-1}p^{n-2} + pqr = \frac{n^2}{2}q^{n-2},$$

hvor r var et helt tal.

Da $n > 2$, saa maatte p efter dette gaa op i $\frac{n^2}{2}$ og q op i 2^{n-1} .

Da cosinus til bøjningsvinklerne φ i et regulært tetraeder er lig $\frac{1}{3}$, saa kan altsaa intet multiplum af φ blive lig et helt antal rette vinkler.

§ 4.

Uagtet altsaa intet regulært tetraeder paa sidstnævnte vis kan opdeles i de samme polyedriske stykker som et retvinklet parallelepiped, saa kan dette dog lade sig gjøre med visse andre tetraedre og pyramider.

Vi skal paavise dette.

Videre skal vi give et par eksempler paa et legeme, som paa to forskellige maader kan opdeles i det samme antal kongruente dele. Endelig skal vi i de nævnte eksempler godtgjøre, at hver af delene ved den ene opstykning kan deles i de samme dele, som hver af delene ved den anden opstykning.

Sats 8. En kubus kan ved fem paa en sidekant lodrette planer opdeles i sex kongruente parallelepipediske skiver S . Videre kan den opstykkedes i sex kongruente firkantede regulære pyramider P , som hver har sit toppunkt i kubens centrum og en af dennes sideflader til grundflade.

Hver af de sex pyramider P kan da her opstykkedes i de samme dele som hver af de sex skiver S .

For at bevise dette opstykker vi først den givne kubus K ved planer parallelle med dens sideflader i $6 \cdot 6 \cdot 6$ kongruente smaa kuber k .

Derpaa opdeles hver af kuberne k ved planer gennem hvert par modstaaende sider i samme i 24 kongruente trekantede pyramider p .

Man ser da strax, at hver af skiverne S saavel som hver af pyramiderne P kan opbygges af $6^3 \cdot 24 = 6^3 \cdot 4$ pyramider p .

Lad i en kubus a, b, c og d betegne fire hjørner, som i fortløbende orden ogsaa danner hjørnerne i en sideflade.

Lægges nu i kubens et plan gennem hvert par modstaaende sidekanter, saa blir kubens herved som før nævnt delt i 24 kongruente tetraeder.

Først blir jo kubens ved planerne opdelt i de ovenfor omtalte sex firkantede pyramider P med fælles toppunkt i kubens centrum x og med kubens sideflader til grundflader; dernæst blir hver af pyramiderne P ved planerne opdelt i fire kongruente pyramider p , som har et fælles hjørne i kubens midtpunkt x og hvis til samme svarende modstaaende sideflader dannes af de fire triangler, hvori grundfladen af nævnte pyramide P deles ved sammes diagonaler.

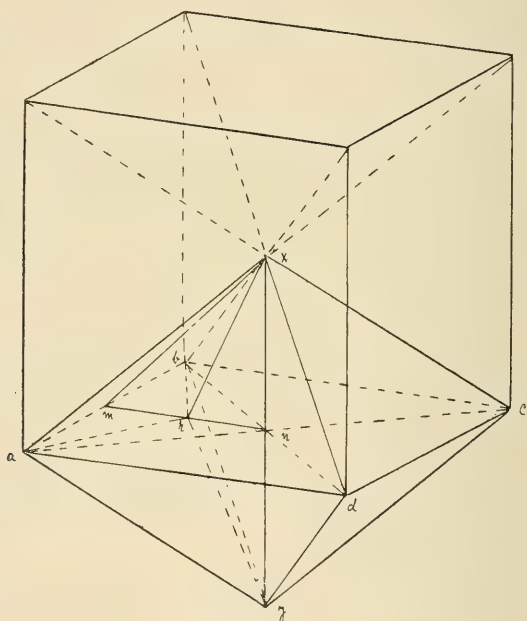


Fig. 8.

Er n skjæringspunktet mellem diagonalerne ac og bd i sidefladen $abcd$ og y et saadant punkt, at n blir midtpunktet mellem x og y , da vil hver af de to pyramider $abxc$ og $abxy$ paa samme grundflade abx kunne deles i to med pyramiderne p kongruente dele.

Bortskjærer vi ved et vilkaarligt med abx parallelt plan af begge pyramider to med disse henholdsvis ligedannede dele, saa kan de to restlegemer, efter sats 3, opdeles i de samme stykker.

Sats 9. Det tetraeder, hvis hjørner falder i punkterne a , b , x og y , og som er begrændset af fire kongruente ligebenede triangler, hvis grundlinier er lig kubens sidekanter og hvis øvrige sider er lig halvdelen af hver af dens diagonaler, kan paa to maader deles i 8 kongruente tetraedre.

Trækkes nemlig for hvert af hjørnerne i tetraedret $abxy$ det plan, som halverer de i hjørnet sammenstødende tre sidekanter, saa vil de erholdte planer af tetraedret udskjære fire med samme ligedannede kongruente mindre tetraedre, hvis sider er halvdelen af de tilsvarende sider i det oprindelige tetraeder.

Den resterende del af tetraedret $abxy$ har nu samme form som det oktaeder, der er sammensat af de to kongruente pyramider, som har toppunkt i henholdsvis x og y og som har $abcd$ til fælles grundflade. Da dette oktaeder er sammensat af fire med $abxy$ kongruente tetraedre, som har xy til fælles sidekant, maa nævnte oktaederformige rest af tetraedret $abxy$ kunne deles i fire med de allerede afskaarne fire dele kongruente tetraedre.

Tetraedret $abxy$ kan altsaa opstykkes i 8 kongruente tetraedre q , der har samme form som det hele tetraeder.

Som man ser, vil i tetraedret $abxy$ forbindelseslinierne mellem midtpunkterne for henholdsvis de tre par mod-

staaende sidekanter ikke blot have fælles midtpunkt, men ogsaa staa lodrette paa hverandre. De tre linier vil jo danne diagonalrue i det før nævnte oktaederformede restlegeme.

Men tetraedret $abxy$ kan ogsaa som sagt opstykket i 8 tetraedre paa anden vis.

Lægger man nemlig planer gennem tetraedrets sidekanter og den omskrevne kugles centrum r , saa blir tetraedret herved delt i fire kongruente tetraedriske dele.

Disse blir atter delt i 8 kongruente tetraedre s ved de to af de samme planer, som gaar gennem henholdsvis ab og xy .

Er m midtpunktet af ab , saa falder den omskrevne kugles centrum r i midtpunktet af mn .

Efter hvad ovenfor er sagt, saa skal altsaa til ex. tetraedrene $bmr\alpha$ og $brn\alpha$ være kongruente.

Da nemlig

$$bm = \alpha n$$

$$mr = nr$$

$$m\alpha = n\beta$$

og

$$\angle b m \alpha = \angle \alpha n \beta = 90^\circ$$

$$\angle b m r = \angle \alpha n r = 90^\circ$$

$$\angle r m \alpha = \angle r n \beta = 45^\circ,$$

saa blir de to hjørner ved m og n kongruente og altsaa ogsaa de to tetraedre $mbr\alpha$ og $n\alpha r\beta$.

Bortskjærer man ved et vilkaarligt med mbn parallelt plan af disse to tetraedre to med dem ligedannede og kongruente dele, som har α til fælles hjørne, da vil de to restlegemer, efter sats (2), kunne deles i de samme stykker.

Da den omskrevne kugles centrum r falder i midtpunktet af hver linie, som forbinder midtpunkterne af to

vilkaarlige modstaaende sider i tetraedret $abxy$, saa maa hver saadan forbindelseslinie ogsaa staa lodret paa begge de nævnte sidekanter.

Sats 10. Hver af de 8 kongruente dele, hvori tetraedret $abxy$ opstykket ved den førstnævnte opdeling, kan deles i de samme dele som hver af de 8 kongruente dele, hvori $abxy$ deles ved sidstnævnte opstykning.

Er h midtpunktet af ax og k midtpunktet af bx , saa skal med andre ord tetraedret $n\alpha hk$ kunne deles i de samme stykker som til ex. tetraedret $n\beta r\alpha$.

For at bevise dette tænker vi os rummet ved tre skærer paa hinanden lodrette plan opdelt i kuber H , hvis sider er lig halvdelen af siden ab i den ovenfor behandlede kubus. Videre tænker vi os, at dennes sideflader tilhører nævnte planskarer.

I ethvert af de 8 med $n\alpha hk$ kongruente tetraedre, som fremgaar af tetraedret $abxy$ ved den første opstykning, vil to hjørner falde i endepunkterne for en fælles sidekant i to kuber H med en fælles sideflade, medens de to øvrige hjørner falder i de to kubers centre.

Kuberne H maa følgelig danne den samme figur med hvert af de nævnte 8 tetraedre.

Det samme gjælder ogsaa de 8 med $bmr\alpha$ kongruente tetraedre, som fremgaar af $abxy$ ved den anden opstykningsmaade.

Af hjørnerne i hvert af disse tetraedre vil jo to A og B falde i endepunkterne af en til en af kuberne H hørende sidekant, og et af de to resterende hjørner C i det til A

modstaaende hjørne i kuben, medens det fjerde tetraederhjørne D vil halvere en af de to fra B udgaaende og fra BA forskellige sider i samme.

Vi lægger nu i hver af kuberne H et plan gennem hvert par modstaaende sidekanter. Videre overskjærer vi hver af kuberne med alle de de planer, som kan lægges gennem to modstaaende hjørner og midtpunktet for en sidekant, som ikke har noget af sine endepunkter i noget af de to hjørner.

Ved alle disse planer blir kuberne H delt i de samme stykker, saaledes at herved ingen sidekant eller sideflade blir særskilt fremhævet.

Ved samtlige snitplaner vil derfor tetraedret $abxy$ blive opdelt i et begrændset antal saadanne stykker U , at hvilke-somhelst to af de 8 tetraedriske dele q indeholder de samme dele og ligesaa hvilkesomhelst af de 8 tetraedriske dele s . $n\alpha hk$ og $bmr x$ maa altsaa indeholde de samme dele U .

Danner man for en række plane flader summen:

$$\int \frac{ds}{\varrho}$$

af alle de kvotienter $\frac{ds}{\varrho}$, som erholdes, om hvert uendelig lidet element ds af omkredsene divideres med den til elementet hørende krumningsradius ϱ , som regnes positiv eller negativ, alt eftersom krumningen er konvex eller konkav, da vil nævnte sum bevare sin værdi, om fladerne opstykket i mindre dele.

Vi forudsætter her, at ϱ ikke blir nul for noget punkt paa nogen af omkredsene eller snitlinierne.

Vi kunde ogsaa have nøiet os med at forudsætte, at de nævnte linier var sammensat af stykker med denne egenskab.

Lignende sætninger kan man ogsaa bevise for legemers vedkommende.

Det vil kunne hænde, at man af et sammenhængende eller usammenhængende legemes overflade kan udskjære to kongruente dele α og β med hver sin tilhørende del af legemet og det saaledes, at α og β , naar de bringes til dækning, vil fuldstændig adskille de nævnte to legemsdele a og b .

Bortskjærer vi af et legemes overflade alle paa ovenstaaende vis kongruente fladepar, saa vil vi kalde resten for legemets reducerede overflade.

Skal to legemer kunne opstykkes i de samme dele, saa maa deres reducerede overflader ogsaa kunne opstykkes i de samme dele.

Efter dette kan man ikke altid dele et legeme i stykker, som gjennem bevægelse i det tre-dimensionale rum atter paa anden vis kan sammensættes til et legeme, som er kongruent med det første legemes speilbillede.

§ 5.

Vi skal saa berøre et problem, som paa flere maader staar i nær sammenhæng med det, vi i denne afhandling har studeret.

Lad der paa hver af to ubegrændsede rette linier P og Q være givet en række vilkaarlig valgte punkter.

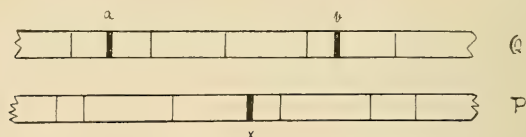
Hvorledes skal man da til de givne punkter paa begge linier kunne tilføie saadanne nye, at

hvert punkt af den ene linie vil falde sammen med et tilsvarende punkt af den anden ved hver af to forskjellige paa forhaand opgivne sammenlægninger af de to linier.

Vi vil tænke os, at de to liniers to stillinger i forhold til hinanden ved de nævnte sammenlægninger er defineret derved, at et punkt x paa P ved den ene stilling falder i et punkt a af Q , og i den anden stilling i et punkt b af samme linie.

Desuden vil vi for simpelhedsskyld forudsætte, at P kan bringes fra den ene stilling til den anden ved en forskyvning langs Q .

Den opstillede opgave kan da løses saaledes:



Ved uendelig mange delingspunkter opstykket baade P og Q i ligestore dele af længden ab , saaledes at x blir et delingspunkt paa P , og a og b to paa hinanden følgende delingspunkter paa Q .

Derpaa tænker vi os i en af de sammenfaldende stillinger for P og Q samtlige de nævnte stykker af P og Q med sine tilhørende blandt de givne punkter skjøvet sammen, til de dækker ab .

Paa stykket ab faar vi paa denne maade ophobet samtlige de paa P og Q opgivne punkter.

Tilføier vi nu paa P og Q saadanne punkter, at alle de nævnte med ab kongruente dele af P og Q herved blir forsynet med den samme punktrække som ab , naar alle de givne punkter paa ovenstaaende vis tænkes ophobet

paa samme, da har man herved, som det let indsees, erholdt den simpleste løsning af den stillede opgave.

Var P og Q ikke ubegrænsede, men blot to retliniede stykker, saa bar man sig ad paa lignende maade.

Samme fremgangsmaade kunde ogsaa anvendes ved andre linier, som lod sig forskyve langs sig selv, saasom cirkler og skruelinier.

I første fald, naar P og Q var to kongruente cirkler og ikke bare dele af saadanne, da maatte ab staa i et rationalt forhold til cirklernes omkreds.

Skal opgaven være mulig ved tre forskellige sammenlægninger af P og Q , idet punktet x af P ved den tredje sammenlægning skal falde i punktet c af linien Q , da maa ab og ac staa i et rationalt forhold til hinanden.

I dette tilfælde opdeler man, ved ubegrænsede linier, P og Q i ligestore stykker, hvis længde er et fælles maalt for ab og ac , saaledes at x blir et delingspunkt paa P og a , b og c tre delingspunkter paa Q . Derpaa gaar man frem som ovenfor.

Ved lignende problemer i planet og i rummet bærer man sig ad paa en tilsvarende maade.

Trondhjem, 17de november 1902.

Axel Thue.

Anm. Nogle maaneder efter at nærværende arbeide var indsendt til red. af archivet, modtog jeg fra *C. Juel* en afhandling af ham med titelen: « Égalité par addition de quelques polyèdres ». I dette arbeide, som er fremlagt i dansk videnskabselskab i december 1902, er fort bevis for ovenstaaende sats 8, pag. 31.

Jeg er her ogsaa blit opmærksom paa, at den pag. 24 anførte sats 6 allerede er fremsat af *Dehn* og *Vahlen* i *Mathem. Annalen*, T. 55, p. 465, og T. 56, p. 507.

SUR CERTAINES
ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES

PAR

ALF GULDBERG



ALB. CAMMERMEYERS FORLAG

Morten Johansens Bogtrykkeri. — Kristiania 1903

SUR CERTAINES ÉQUATIONS AUX DIFFERENCES

Par

ALF GULDBERG.

L'existence des solutions singulières des équations aux différences une fois remarquée et démontrée par *Poisson*, une question s'élève, à savoir : quels sont les théorèmes sur les solutions singulières des équations différentielles qui s'appliquent aux solutions singulières des équations aux différences et quels sont ceux qui ne valent plus.

Dans la seizième de ses « Leçons sur le calcul des fonctions », *Lagrange* a démontré plusieurs propositions importantes sur les solutions singulières des équations différentielles. Dans les lignes qui suivent, je me propose de faire voir comment ses théorèmes s'adaptent et se modifient quand on cherche à les appliquer aux équations aux différences.

Considérons l'équation

$$F(x, y, a, b) = 0,$$

où les deux constantes a, b sont liées par une relation

$$\Phi(a, b) = 0.$$

On aura l'équation aux différences qui en résulte, en éliminant ces deux constantes au moyen des trois équations

$$F(x, y, a, b) = 0, \quad \Delta F(x, y, a, b) = 0, \quad \Phi(a, b) = 0.$$

Donc si l'on tire des deux premières les valeurs de a et b en fonction de $x, y, \Delta y^*$ et qu'on désigne ces valeurs par

$$\varphi(x, y, \Delta y) \quad \text{et} \quad \psi(x, y, \Delta y),$$

on aura l'équation aux différences en substituant ces fonctions à la place de a et b dans l'équation de condition

$$\Phi(a, b) = 0.$$

Ainsi l'équation aux différences sera

$$\Phi(\varphi(x, y, \Delta y), \psi(x, y, \Delta y)) = 0.$$

Toute valeur de y en x qui satisfera à la même équation

$$\Phi(\varphi, \psi) = 0$$

et qui n'est comprise dans aucune de ses intégrales s'appelle une solution singulière.**

Soit maintenant

$$y = f(x)$$

une solution singulière donnée, on en tire

$$\Delta y = \Delta f(x).$$

En substituant $f(x)$ et $\Delta f(x)$ au lieu de y et Δy dans les fonctions φ et ψ , elles deviendront de simples fonctions de x ; et, éliminant x entre elles, on aura une équation entre φ et ψ , que nous représenterons par

$$\Phi(\varphi, \psi) = 0.$$

* Nous mettons toujours la différence Δx égale à l'unité.

** *Poisson* : Journal de l'École Polytechnique. T. 6, p. 61—62. Voir aussi *Lacroix* : Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, seconde édition. T. III, p. 259, note.

Ainsi l'équation

$$y = f(x)$$

satisfera à l'équation aux différences donnée

$$\Phi(\varphi(x, y, \Delta y), \psi(x, y, \Delta y)) = 0.$$

On a donc la règle suivante, tout à fait analogue à celle qui vaut pour les équations différentielles du premier ordre* :

Soit $y = f(x)$

la valeur singulière donnée de y . Prenons une équation quelconque

$$F(x, y, a, b) = 0$$

entre x, y et deux constantes a et b . De cette équation et de l'équation

$$\Delta F(x, y, a, b) = 0$$

on tirera les valeurs de a et b en fonction de $x, y, \Delta y$; soient

$$a = \varphi(x, y, \Delta y), \quad b = \psi(x, y, \Delta y)$$

ces valeurs. On substituera dans ces fonctions $f(x)$ et $\Delta f(x)$ à la place de y et Δy , on aura donc deux équations qui, par l'élimination de x , en donneront une en a et b que nous représenterons par

$$\Phi(a, b) = 0.$$

Si maintenant on substitue dans cette équation à la place de a et b leurs premières valeurs en fonction de $x, y, \Delta y$, on aura l'équation aux différences cherchée

$$\Phi(\varphi(x, y, \Delta y), \psi(x, y, \Delta y)) = 0$$

dont la solution singulière sera

$$y = f(x)$$

* Voir la note p. 8.

et dont l'intégrale complète sera donnée par les équations

$$F(x, y, a, b) = 0$$

$$\Phi(a, b) = 0.$$

Prenons, par exemple, l'équation

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} a + b$$

d'où on aura

$$\Delta y = -\frac{3}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} a.$$

De ces deux équations on tire

$$a = -\frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2x} \Delta y$$

$$b = y + \frac{4}{3} \Delta y.$$

Supposons maintenant que l'on ait la solution singulière

$$y = \frac{8}{9} \left(-\frac{1}{2}\right)^{3x},$$

elle donne

$$\Delta y = -\left(-\frac{1}{2}\right)^{3x}.$$

De sorte que, par ces substitutions, les valeurs de a et b deviendront :

$$a = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2x} \left(-\frac{1}{2}\right)^{3x}$$

$$b = -\frac{4}{9} \left(-\frac{1}{2}\right)^{3x},$$

d'où l'on tire, en éliminant x , cette équation en a et b :

$$b = -\frac{3}{16} a^3.$$

Donc, substituant ici les premières valeurs de a et b en $x, y, \Delta y$ on aura l'équation aux différences du premier ordre

$$y + \frac{4}{3} \Delta y - \frac{4}{9} (64)^x \Delta y^3 = 0^* ,$$

qui possède la solution singulière

$$y = \frac{8}{9} \left(-\frac{1}{2} \right)^{3x}$$

et dont l'intégrale complète est

$$y = \left(\frac{1}{2} \right)^{2x} a - \frac{3}{16} a^3 .$$

On peut appliquer la même méthode à la recherche des équations aux différences du second ordre ou des ordres supérieurs dont l'équation singulière sera donnée.

Supposons que cette équation soit du premier ordre et représentée par :

$$\Delta y = f(x, y) .$$

On prendra une équation quelconque en x, y et trois constantes arbitraires a, b, c , et on tirera de cette équation et de ses équations aux différences du premier et du second ordre les valeurs de a, b, c en fonction de $x, y, \Delta y$ et $\Delta^2 y$.

On substituera dans ces fonctions les valeurs de Δy et $\Delta^2 y$ en x et y tirées de l'équation singulière donnée ; on aura a, b, c exprimés en fonction de x et y , ce qui donnera trois équations, d'où, éliminant x et y , il résultera une équation en a, b que nous représenterons par

$$\Phi(a, b, c) = 0 .$$

Cette équation, en y substituant les premières valeurs de a, b, c en fonction de $x, y, \Delta y, \Delta^2 y$ sera l'équation aux différences du second ordre dont la proposée

$$\Delta y = f(x, y)$$

* Voir : *Poisson* : Journal de l'École Polytechnique. T. 6, p. 76.

sera l'équation singulière donnée, et l'équation en x, y, a, b, c en sera la solution complète en x et y , en supposant entre les trois constantes a, b, c la relation donnée par l'équation :

$$\Phi(a, b, c) = 0.*$$

Les équations aux différences de la forme

$$\Phi(a_1, a_2, a_3, \dots a_n) = 0$$

que nous venons de considérer, dans lesquelles les quantités $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ sont les valeurs en $x, y, \Delta y, \Delta^2 y - \Delta^{n-1} y$ tirées d'une équation

$$F(x, y, a_1 a_2 a_3 \dots a_n) = 0$$

et des équations :

$$\Delta F = 0, \quad \Delta^2 F = 0, \quad \dots \Delta^{n-1} F = 0$$

* On voit immédiatement qu'une équation

$$y = f(x)$$

n'est pas toujours une solution singulière de l'équation aux différences trouvée. Choisissons, par exemple, l'équation

$$y = -\frac{x^2}{4}$$

et prenons comme intégrale complète l'équation

$$y = ax + b.$$

La relation $\Phi = 0$ sera donc :

$$b = a^2 - \frac{1}{16}$$

et l'équation aux différences prendra donc la forme

$$y - x\Delta y - (\Delta y)^2 + \frac{1}{16} = 0,$$

dont l'intégrale complète est

$$y = ax + a^2 - \frac{1}{16},$$

et dont l'intégrale indirecte est

$$y = a^2 - \frac{1}{2} a(-1)^x - \frac{x^2}{4}.$$

La solution donnée est donc une solution particulière.

constituent une classe remarquable d'équations aux différences dont l'intégration n'exige que des opérations algébriques.*

Pour le démontrer, soit d'abord

$$F(x, y, a, b) = 0$$

une équation quelconque en x, y et deux constantes a et b . En regardant ces constantes comme arbitraires, l'équation dont il s'agit sera l'intégrale complète d'une équation aux différences du second ordre en $x, y, \Delta y, \Delta^2 y$, qui résultera de l'élimination de a et b au moyen des équations :

$$F = 0, \quad \Delta F = 0, \quad \Delta^2 F = 0.$$

Soit :

$$f(x, y, \Delta y, \Delta^2 y) = 0$$

le résultat de l'élimination.

Si maintenant, l'on commence par tirer les valeurs de a et b des deux équations

$$F = 0, \quad \Delta F = 0$$

et que ces valeurs soient représentées par les fonctions

$$\varphi(x, y, \Delta y) \quad \text{et} \quad \psi(x, y, \Delta y),$$

il est clair que les deux équations

$$a = \varphi(x, y, \Delta y), \quad b = \psi(x, y, \Delta y),$$

où a et b sont des constantes arbitraires, seront les deux intégrales intermédiaires de l'équation précédente

$$f(x, y, \Delta y, \Delta^2 y) = 0;$$

* *Lagrange* a montré qu'une équation différentielle ordinaire d'une telle forme possède toujours une solution singulière; c'est une proposition qui ne vaut plus à l'égard des équations aux différences de même forme. C'est ce qu'on voit immédiatement, en considérant l'équation aux différences

$$y - x\Delta y = \Delta y^2,$$

qui ne possède aucune solution singulière.

par conséquent, en éliminant entre elles Δy , on obtient $F = 0$.

Mais l'équation aux différences du premier ordre

$$\Phi(\varphi(x, y, \Delta y), \psi(x, y, \Delta y)) = 0$$

possède exactement l'intégrale complète

$$F(x, y, a, b) = 0,$$

où a et b sont liés par la relation

$$\Phi(a, b) = 0.$$

En effet, l'équation

$$F(x, y, a, b) = 0$$

qui donne

$$\varphi(x, y, \Delta y) = a, \quad \psi(x, y, \Delta y) = b,$$

transformera l'équation $\Phi = 0$ en $\Phi(a, b) = 0$, et elle satisfera donc à cette équation, si a et b sont liés par la relation $\Phi(a, b) = 0$.

En appliquant les mêmes principes aux équations aux différences des ordres supérieurs, on prouvera que, si l'on a une équation aux différences du second ordre, dont le premier membre puisse être une fonction quelconque $\Phi(a, b, c)$ de trois fonctions a, b, c déterminées par une équation quelconque

$$F(x, y, a, b, c) = 0$$

entre x, y, a, b, c et par ces deux équations aux différences du premier et second ordre

$$\Delta F = 0, \quad \Delta^2 F = 0$$

prises en regardant a, b, c comme constantes, l'intégration de l'équation proposée n'exigera que des éliminations.

Et de même pour les équations aux différences des ordres supérieurs.

Or, il s'agit, maintenant, de reconnaître à *posteriori* si les fonctions données, dont se compose une équation proposée, dépendent d'une même équation primaire, de manière qu'elles puissent représenter les valeurs des constantes tirées de cette équation et de ses équations aux différences.

On observe tout de suite que l'on n'a pas ici une analogie directe avec les équations différentielles correspondantes.

En effet une équation aux différences du premier ordre

$$\varphi(x, y, \Delta y) = 0$$

ne donne pas en général une équation aux différences du second ordre *linéaire* en $\Delta^2 y$.

On voit donc qu'il suffit que les fonctions données, dont se compose l'équation aux différences proposée, soient des intégrales intermédiaires d'une même équation aux différences linéaire en la différence du plus haut ordre.

Les équations aux différences que nous venons de traiter forment un cas spécial de la classe d'équations aux différences de la forme

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_m) = 0,$$

où les $\varphi_i(x, y, \Delta y, \cdots \Delta^n y)$ sont les intégrales intermédiaires d'une équation aux différences d'ordre $n+1$ linéaire en $\Delta^{n+1} y$.

Si l'on a $m = n+1$ on retrouve les équations aux différences ici considérées. On voit immédiatement que l'intégration d'une équation aux différences de la classe considérée exige, outre des éliminations, l'intégration d'une équation aux différences d'ordre $n-m+1$.

GENERALREGISTER

TIL

ARCHIV FOR MATHEMATIK OG NATURVIDENSKAB

BIND 1—25

KRISTIANIA
ALB. CAMMERMEYERS FORLAG

1903

Saavel i *Forfatterregistret* som *Sagregistret* betyder det første (med fede Typer trykte) Tal efter Titlen *Bindtallet*; det andet betyder for *Bind 1—17* (inklusive) *Sidetallet*, for *Bind 18—25* Afhandlingens Numer, idet hver Afhandling har særlig Paginering. Inddelingen af *Sagregistret* er væsentlig den samme som er anvendt i «*International Catalogue of Scientific Literature*» og Hovedafsnittene er ordnet alfabetisk. Indenfor de enkelte Hovedafdelinger er Ordenen kronologisk undtagen hvor flere Afhandlinger af samme Forfatter handler om samme Emne; de er da opført under den første Afhandling.

FORFATTERREGISTER.

- Aal, A.** Om sandsynlighed og dens betydning logisk betragtet. **19.** 9.
- Aars, Kr. B.-R.** Zur Biogenese der spontan erregten Empfindungen. **22.** 4.
- Åstrand, I. I.** Om en ny Methode for Løsning af trinomiske Ligninger. **6.** 448.
- Arnesen, E.** Beiträge zur Anatomie und Histologie von *Ulocyathus arcticus*, *Cariophyllia Smithii*, *Dendrophyllia ramea* und *Cladocora cespitosa*. **20.** 9.
- Bang, I.** Kemiske og fysiologiske Studier over Guanylsyren. **23.** 1.
— Mindre Meddelelser om Guanylsyren. **24.** 8.
— Studier over Nucleoproteider. **25.** 1.
- Belsheim, J.** Syv Breve fra Præsten Hans Strom til Biskop Gunnerus. **9.** 405.
— Udkast til en Autobiografi af Justitsraad Kristopher Hammer. **9.** 428.
- Bidenkap, O.** Undersøgelser over Annulata Polychaeta omkring Hardangerfjordens Udlob Sommeren 1893. **17.** 1.
- Birkeland, Kr.** Om Indsugning af Kathodestraaler mod en magnetisk Pol. **20.** 15.
- Bjerknes, V.** Om Electricitetsbevægelsen i Hertz's primære Leder. **15.** 165.
— Om anvendelsen af mekanikens principer i fysiken. **15.** 331.
- Blytt, A.** Om den sandsynlige årsag til den periodiske ændring af havstrømmenes styrke. **9.** 23.
— Til forsvar for mit forsøg paa en geologisk tidsregning. **14.** 196.
- Bonnevie, H.** Epaktberegning efter arithmetiske Formler. **12.** 102.
- Brunchorst, J.** Kritiske bemærkninger om «sop paa klipfisk». **13.** 98.
- Böckman, P. W. K.** Undersøgelser over nogle Fladbrodsorters Sammensætning og Udnyttning i Organismen. **24.** 3.
- Chaykine, M. W.** Sur la scission des cellules organiques. **14.** 101.
- Collett, R.** Nogle Bemærkninger i Anledning af Hr. Cand. L. Stejnegers Afhandling «Underslægten *Lanius* med særligt Hensyn paa dens norske Arter». **4.** 180.
— Bemærkninger til Hr. Stejnegers Gjensvar. **4.** 271.
— En Bemærkning til Hr. Stejnegers Gjensvar Pag. 274. **5.** 368.
— Om *Lanius excubitor* og dens forskjellige Formers Optræden i Norge. **16.** 50.
— *Synotus barbastellus*, (Schreb.), *Phoca foetida*, Müll., nye for Norges Fauna. **19.** 6.
— Om en Samling Fiske fra Azorerne, tilhørende Musæet i Ponta Delgada. **19.** 7.

- Collett, R.** Om en Del for Norges Fauna nye Fiske fundne i 1880—1896. **19.** 8.
- Om fem for Norges Fauna nye Fiske (1871—1900). **23.** 7.
- Om tre for Norges Fauna nye Fiske. **25.** 2.
- Dahl, O.** Herbarium antiquum Danicum, carmine D. Oligeri Jacobæi adornatum. **15.** 249.
- En gammel Trondhjems-flora af Joachim Irgens. **15.** 348.
- **16.** 1.
- Breve fra norske Botanikere til Prof. I. W. Hornemann. **17.** 4.
- Danielsen, D. C.** Beskrivelse over nye Arter, henhørende til Slægten *Solenopus*, samt nogle Oplysninger om dens Organisation. **2.** 120.
- Eberlin, P.** Blomsterplanterne i dansk Østgrønland. En plantegeografisk Studie. **12.** 325.
- Efterskrift til Afhandlingen: Blomsterplanterne i dansk Østgrønland. **12.** 384.
- Den historiske Udvikling af Kjendskabet til Grønlands Indlandsis. **13.** 277.
- Tre Kapitler af et Arbejde om Livsbetingelsernes geologiske Udvikling. **15.** 237.
- Engel, F.** Sur un groupe simple à quatorze paramètres. **16.** 322.
- Ferry.** Geometry on the Cubic Scroll of the First Knid. **21.** 3.
- Friele, H.** Tungebevæbningen hos de norske Rhipidoglassa. **2.** 299.
- The development of the skeleton in the genus *Waldheimia*. **2.** 380.
- Geelmuyden, H.** Om Indflydelsen af Banens Excentricitet paa den Varmemængde, som et Himmellegeme modtager fra Solen. **1.** 438.
- Om Zodiakallyset. **3.** 258.
- Den koniske Pendelbevægelse. **5.** 307.
- Remarques sur la théorie de la lumière zodiacale. **7.** 55.
- Nogle magnetiske observationer i Nordmarken og i Christiania. **19.** 10.
- Geelmuyden, H. Chr.** Benmarvens Forhold i Sygdomme og dens fysiologiske Funktion. **11.** 1.
- Om Aceton som Stofvexelprodukt. **19.** 2.
- Om Acetonuri ved Phloridzinforgiftning. **20.** 14.
- Om kulhydrater i urinen ved sukkersyge hos børn. **24.** 9.
- Guldborg, A.** Sur certaines équations aux différences. **25.** 11.
- Håkonson-Hansen, M. K.** Nordlysiagttagelserne i Trondhjem i tidsrummet 1878—1888. **13.** 112.
- Hagen, I., og Worm Müller.** Druesukkerets Titring i Menneskeurin. **3.** 45.
- Om Druesukkerets Forhold til Kobberoxyd. **3.** 293.
- Om Forbindelser af Druesukker med Kobberoxyd og Kali. **3.** 307.
- Druesukkerets Forhold til Kobberoxydhydrat. **5.** 1.
- Druesukkerets Forhold til Kobberoxydhydrat og Alkali. **5.** 10.
- Om Kobberoxydhydratets Reduktion ved Druesukker i neutral og eddikesur Vædske. **5.** 26.
- Om Kobberoxydhydratets Reduktion ved Druesukker i alkalisk Vædske. **5.** 34.
- Den Trommer'ske Proves Ømfindtlighed; Fehlings Vædske som kvalitativt Reagens paa Sukker. **5.** 55.

- Hagen, I., og Worm Müller.** Om Processen ved den Trommer'ske Prøve. **5.** 74.
- Kortere Meddelelser af fysiologisk-kemisk Indhold. **5.** 359.
- Hansen, A. M.** Om seter eller strandlinjer i store hoider over havet. **10.** 329.
- Strandlinjestudier. **14.** 254. — **15.** 1.
- Om «strandflaten». **17.** 5.
- Hansen, G. A.** Oversigt over de norske Serpula-Arter. **3.** 39.
- Anatomie von *Leanira tetragona*. **3.** 352.
- Om Nerveenderne i Iglens voluntære Muskler. **6.** 460.
- Hansteen, H.** Ældre og nyere lagttagelser om Solvforekomster i Kongsbjergfjeldet. **22.** 2.
- Heiberg, J.** Lappische Gräber-Schädel. **3.** 234.
- Helland, A.** Om de isfyldte Fjorde og de glaciale Dannelser i Nordgrønland. **1.** 59.
- Om Klormængden i Nordsoen, Atlanterhavet og Davisstrædet. **1.** 229.
- Om Indsøerne i Italien og Fjordene i Norge. **2.** 387.
- Om Kogsaltkrystaller og flydende Kulsyre i et og samme Hulrum i Kvarts fra en Pegmatitgang. **2.** 445.
- Om Kobolt og Nikkelertsernes Forekomst i Norge. **4.** 188.
- Om de glaciale Dannelser paa den nordeuropæiske Slette. **4.** 280.
- Et Afsnit af Playfairs Illustrationer til Huttons Theori om Jorden. **4.** 367.
- Om Glaciationen af Shetland og Orkney. **4.** 385.
- Studier over Konglomerater. **6.** 1.
- Forsøg paa en geologisk Diskussion. **6.** 171.
- Om Islands Jøkler og om Jøkelelvnes Vandmængde og Slamgehalt. **7.** 200.
- Hoidemaalinger fra Island. **7.** 233.
- Jordskjælvene paa Ischia. **9.** 1.
- Studier over Islands petrografi og geologi. **9.** 69.
- Kongsberg solvværks drift før og nu. **10.** 189.
- Svenske geologer om indsjøerne. **10.** 414.
- Professor Blytts geologiske Tidsregning. **14.** 106.
- Lurfaldet i Guldalen 1345. **17.** 6.
- Hennum, I. O.** Til belysning af cellernes former. **9.** 301.
- Om sadelleden (peronarthrosis). **11.** 309.
- Holmboe, I.** Undersøgelser over norske Ferskvandsdiatoméer. **22.** 1.
- **23.** 2.
- Holmsen, A.** Seiches i norske indsoer. **20.** 1.
- Dybden af Øieren. **25.** 7.
- Holst, E.** Ueber algebraische cykloidische Kurven. **6.** 126.
- Ein Beitrag zur methodischen Behandlung der metrischen Eigenschaften algebraischer Kurven. **7.** 109.
- Analytischer Beweis eines geometrischen Satzes. **7.** 177.
- Ein Paar synthetische Methoden in der metrischen Geometri mit Anwendungen. **7.** 240.
- Ueber die praktische Integration rationaler Bruchfunktionen. **10.** 290.
- Holtmark, G.** Eine Methode für die Intensitätsmessung von Röntgenstrahlen nebst einer Berechnung der Wellenlänge derselben. **24.** 10.

- Isaachsen, D.** En bemærkning om beregninger af en traads tværsnit ved elektriske modstandsbestemmelser. **12.** 118.
- Johan-Olsen, O.** «Sop paa klipfisk, den saakaldte mid.» Et tilsvaer til hr. Brunchorst. **13.** 104.
- Knothe, E.** Bestimmung aller Untergruppen der projectiven Gruppe des linearen Complexes. **15.** 97.
- Koren, J.** Beskrivelse over nye Arter, henhørende til Slægten Sole-nopus, samt nogle Oplysninger om dens Organisation. **2.** 120
- Lie, S.** Theorie der Transformationsgruppen. I. **1.** 19. II. **1.** 152. III. **3.** 93. IV. **3.** 375. V. **4.** 232.
- Vervollständigung der Theorie der Berührungs-Transformationen. **1.** 194.
 - Résumé einer neuen Integrations-Theorie. **1.** 335.
 - Neue Integrations-Methode der Monge-Ampère'schen Gleichung. **2.** 1.
 - Die Störungs-Theorie und die Berührungs-Transformationen. **2.** 129.
 - Synthetisch-analytische Untersuchungen über Minimalflächen. **2.** 157.
 - Theorie des Pfaff'schen Problems I. **2.** 338.
 - Petite contribution à la théorie de la surface Steinerienne. **3.** 84.
 - Sätze über Minimalflächen. I. **3.** 166. II. **3.** 224. III. **3.** 340.
 - Bestimmung aller in eine algebraische developpable eingeschriebenen algebraischen Integralfächen der Differentialgleichung $s = 0$. **4.** 334.
 - Zur Theorie der Flächen constanter Krümmung. **4.** 345. III. **5.** 282. IV. **5.** 328. V. **5.** 518.
 - Weitere Untersuchungen über Minimalflächen. **4.** 477.
 - Ueber Flächen, deren Krümmungsradien durch eine Relation verknüpft sind. **4.** 507.
 - Discussion der Differentialgleichung $\frac{d^2z}{dx dy} = F(z)$. **6.** 112.
 - Transformationstheorie der partiellen Differentialgleichung $s^2 - rt = \frac{(1+p^2+q^2)^2}{a^2}$. **6.** 153.
 - Ueber die Integration durch bestimmte Integrale von einer Classe linearer partieller Differentialgleichungen. **6.** 328.
 - Zur Theorie der geodätischen Curven der Minimalflächen. **6.** 490.
 - Bestimmung aller Flächen, die in mehrfacher Weise durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden. **7.** 155.
 - Ueber Flächen, die infinitesimale und lineare Transformationen gestatten. **7.** 179.
 - Ueber gewöhnliche Differentialgleichungen, die eine Gruppe von Transformationen gestatten. **7.** 443.
 - Classification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen xy , die eine Gruppe von Transformationen gestatten. I—II. **8.** 187. III. **8.** 371. IV. **9.** 431.
 - Bestimmung des Bogenelements aller Flächen, deren geodätische Kreise eine infinitesimale Berührungstransformation gestatten. **9.** 40.

- Lie, S.** Ueber die allgemeinste geodätische Abbildung der geodätischen Kreise einer Fläche. **9.** 62.
 — Zur Theorie der Transformationsgruppen. **9.** 449.
 — Untersuchungen über Transformationsgruppen. I. **10.** 74. II. **10.** 353.
- Lonnberg, E.** Ein neuer Bandwurm (*Monorygma Chlamydoselachi* n. sp.) aus *Chlamydoselachus anguineus*, Garmann. **20.** 2.
- Münster, Chr. A.** Garnierit (Nikkelgymnit) fra Foldalen. **14.** 240.
- Münster, E.** Om Hytteproduktet, Sten. **1.** 239.
- Norman, I. M.** Voksesteder for nogle af den norske Floras Karplanter søndenfor Polarkredsen. **5.** 229.
 — *Notationes summatis conceptæ observationum floræ arcticæ norvegiæ posteriore tempore effectarum, correctione addita latitudinis geographicæ terminorum polarium prius indicatorum.* **5.** 436.
 — Om karplanternes udbredning i det nordenfj. Norge. **8.** 1.
- Olsson, K. G.** Bemerkungen über die Integrationsmethoden der Zeitreduction in der Gylden'schen Theorie. **14.** 1.
 — Ueber die Convergenz der Annäherungen in der Gylden'schen Störungstheorie. **14.** 232.
- Otto, J. G.** Bidrag til Kundskaben om Æggehvidestoffernes Forandring ved Pankreasfermentet. **8.** 300.
 — En legalundersøgelse med nogle bemærkninger. **10.** 1.
 — Die neueren Untersuchungen über das Hämoglobin und das Methämoglobin. **10.** 296.
 — Fysiologiske undersøgelser over alkohol, fuselolje og brændevin. **11.** 199.
 — Om nogle dyriske stofvexelprodukter af den aromatiske gruppe. **12.** 126.
 — En fremstilling af de metoder, som har været anvendte ved syntesen af naturligt forekommende organiske forbindelser. **12.** 140.
 — Om den circulære polarisation og dens anvendelse til bestemmelse af organiske legemer. **12.** 158.
- Palmstrøm, A.** Meddelelser fra det matematiske Seminar i Kristiania. I. **12.** 357. II. **13.** 127. III. **14.** 244.
 — Sur quelques formes de l'équation de laquelle dépend la division des périodes des fonctions elliptiques par 7. **19.** 5.
- Peter, A.** Die Flächen, deren Haupttangentialkurven linearen Komplexen angehören. **17.** 8.
- Pettersen, K.** Saltens Geologie. **1.** 211.
 — Bidrag til det nordlige Norges Orografi. **1.** 367.
 — Risehulen ved Lavangsbotten. **1.** 456.
 — Om Fjord- og Daldannelsen inden det nordlige Norge. **2.** 218. 272.
 — Det nordlige Sveriges og Norges Geologi. **3.** 1.
 — Om de i fast Berg udgravede Strandlinjer. **3.** 182.
 — Terrassedannelser og gamle Strandlinjer. **4.** 167.
 — Lofoten og Vesterdaalen. **5.** 369. **6.** 81.
 — Arktis. **6.** 465.
 — Bidrag til de norske Kyststrogs Geologi. **7.** 363. **8.** 322. **10.** 129.
 — Vestfjorden og Salten. **11.** 377.
- Riiber, C.** Kjernerøstning af nikkelholdig magnetkis. **13.** 271.

- Rekstad, J.** Beretning om en undersøgelse af Svartisen, foretagen i somrene 1890 og 1891. **16.** 266.
- Bræbevægelsen i Gudbrandsdalen mod slutningen af istiden. **17.** 9.
- Mærker efter istiden i det nordlige af Gudbrandsdalen. **18.** 6. II. **20.** 10.
- Sandborg, C.** Studier over Hjertets Mekanik og Klappespil. **5.** 97.
- Om Papillarmusklernes Funktion. **5.** 363.
- Sars, G. O.** Nye Bidrag til Kundskaben om Middelhavets Invertebrat-fauna. I. **2.** 10. II. **3.** 465. **4.** 1. III. **11.** 263. IV. **12.** 173.
- Prodröms descriptionis crustaceorum pycnogonidarum quæ in expeditione norvegica anno 1876 observavit. **2.** 237.
- Crustacea et Pycnogonida nova in itinere 2do et 3tio expeditionis norvegicæ 1877 et 1878 collecta. **4.** 427.
- Revision af Gruppen: Isopoda chelifera med Charakteristik af nye herhenhørende Arter og Slægter. **7.** 1.
- Bidrag til Kundskaben om Decapodernes Forvandlinger. I. **9.** 155. II. **13.** 133. III. **14.** 132.
- Pycnogonidea borealia et arctica. **12.** 339.
- Descriptions of some Australian Phyllopoda. **17.** 7.
- Development of *Estheria* Packardii. **18.** 2.
- On Fresh-water Entomostraca. **13.** 3.
- On *Stenocypris* Chevreuxi. **18.** 7.
- Description of two new Phyllopoda. **18.** 8.
- On some West-Australian Entomostraca raised from dried sand. **19.** 1.
- On some South-African Phyllopoda raised from dried mud. **20.** 4.
- Description of two additional South-African Phyllopoda. **20.** 6.
- On *Megalocypris* Princeps, a gigantic fresh-water Ostracod from South-Africa. **20.** 8.
- On the propagation and early development of *Euphausiidae*. **20.** 11.
- On the genus *Broteas* of Lovén with description of type species *Broteas falcifer*. **21.** 2.
- Additional notes on South-African Phyllopoda. **21.** 4.
- Description of *Jheringula* Paulensis, a new generic type of *Macrothricidae* from Brazil. **22.** 6.
- On some Indian Phyllopoda. **22.** 9.
- South-American Entomostraca. I. **23.** 3. II. **24.** 1.
- On a new South American Phyllopod *Eulimnadia* Brasiliensis G. O. Sars raised from dried mud. **24.** 6.
- Fresh-water Entomostraca from China and Sumatra. **25.** 8.
- Schmidt-Nielsen, S.** Ueber Pöckelversuche mit Fischfleisch. **23.** 5.
- Schøyen, W. M.** *Cidaria dilutata* W. V. **3.** 177.
- Oversigt over de i Norges arktiske Region hidtil fundne Lepidoptera. **5.** 119.
- Sexé, S. A.** Om nogle gamle Strandlinjer. **1.** 1.
- Hvorfor blæser det ikke bestandigt fra Øst i det saakaldte stille Belte. **1.** 203.
- Om Moræner. **2.** 469.
- Om Vandets Formindskelse paa Jordens Overflade. **2.** 479.
- Om Skandinaviens vertikale Svingninger. **3.** 241.
- Hvorledes man undgaar de imaginære Størrelser. **4.** 145.

- Sexe, S. A.** Norges Stigning, Strandlinjer, Terrasser. **5.** 247.
 — Om Reliefforandringer i isskuret Felt. **6.** 168.
 — Skulde der ikke lade sig finde et reelt matematisk Udtryk, der kunde overtage de imaginære Størrelsers Rolle eller gjøre samme Tjeneste som disse Størrelser? **7.** 115.
 — Alte Strandlinjen und glaciale Schliff-flächen im Strandgürtel. **7.** 194.
 — Læren om de imaginære Størrelser betragtet fra et elementært Standpunkt, samt om hvorledes man undgaar disse Størrelser. **9.** 205.
- Sparre, K. E.** Om uendelige Rækker med reelle og positive Led. **16.** 195.
- Steen, Helge.** Lurfaldet i Guldalen i 1345. **17.** 6.
- Stejneger, L.** Underslægten *Lanius* med særligt Hensyn paa dens norske Arter. **3.** 323.
 — Fremdeles om Underslægten *Lanius* og dens norske Arter. **4.** 262.
 — Er *Lanius excubitor* L. og *Lanius major* Pall. distinkte eller ei. **5.** 274.
- Stephansen, M. A. Elisabeth.** Ueber partielle Differentialgleichungen vierter Ordnung die ein intermediäres Integral besitzen. **24.** 4.
 — Von der Bewegung eines Continuums mit einem Ruhepunkte. **25.** 6.
- Strand, E.** Beretning om araneologiske Undersøgelser i Hallingdal Sommeren 1898. **21.** 6.
 — Om nogle Staphylinider og Phytophage Hymenoptera. **22.** 3.
 — Lepidopterologiske Undersøgelser særlig i Nordlands Amt. **22.** 5.
 — Orthoptera og Hymenoptera samlede i 1900. **23.** 6.
 — Theridiiden aus dem nördlichen Norwegen. **24.** 2.
 — *Depressaria arctica* Strand n. sp. **24.** 7.
 — Neue norwegische Schmetterlingsformen. **25.** 9.
- Størmer, C.** Sur l'application de la théorie des nombres entiers complexes à la solution en nombres rationnels $x_1 x_2 \dots x_n, c_1 c_2 \dots c_n, k$ de l'équation $c_1 \arctg x_1 + c_2 \arctg x_2 + \dots + c_n \arctg x_n = k \frac{\pi}{4}$. **19.** 3.
 — Une application de théorème de Tchebycheff. **24.** 5.
- Sundt, L.** Spor efter istiden i Chile. **8.** 289.
- Sylow, L.** Sophus Lie. **21.** 1.
- Thesen, J.** Bidrag til tarmkanalens histologi og physiologi hos torsken (*Gadus morhua*). **14.** 220.
- Thor, S.** Bidrag til kundskaben om Norges hydrachnider. I. **19.** 11. II. **20.** 3. III. **21.** 5. IV. **23.** 4.
 — *Capobates Sarsi*, en ny hydrachnide fra Kap, Syd-Afrika. **20.** 5.
 — Huitfeldta, en ny hydrachnideslægt fra Søndfjord, Norge. **20.** 7.
 — Nye hydrachnideformer fundne i Norge sommeren 1898. **20.** 12.
 — *Ljania*, en ny hydrachnide-slægt fra omegnen af Kristiania, Norge. **20.** 13.
- Thue, A.** Om størrelsesbegreberne areal og volum. **10.** 181.
 — Et bidrag til den absolute geometri. **10.** 304.
 — Mindre matematiske meddelelser. I. **16.** 255. II. **19.** 4. III. **25.** 3.
 — Et par theoremer om legemers opstykning i de samme dele. **25.** 10.

- Tornøe, H.** Om Bestemmelse af Alkoholstyrken i Vin ved Spektrometer. **22.** 7.
- Torup, S.** Undersøgelser over nogle Fladbrødsarters Sammensætning og Udnyttning i Organismen. **24.** 3.
- Tromholt, S.** Nordlyset den 17de Marts 1880. **6.** 369.
- Vedeler.** Nerver i fåre-ovariet. **12.** 376.
- Nerver i Hummerens Ovarie. **14.** 94.
- Vogt, J. H. L.** Norske ertsforekomster. **9.** 231. **10.** 16. **12.** 1. **13.** 202.
- Beiträge zur Kenntniss der Gesetze der Mineralbildung in Schmelzmassen und in den neovulkanischen Ergussgesteinen (jüngeren Eruptivgesteinen). **13.** 1. 310. **14.** 11.
- Wanach, B.** Beobachtungen am Pulkowaer Passageninstrument im ersten Vertikal in den Jahren 1890 und 1891 nebst Ableitung der Polhöhenänderung. **16.** 65.
- Wessel, C.** Om Direktionens analytiske Betegning. **18.** 1.
- Wiegner, G.** Ueber eine besondere Klasse von Translationsflächen. **16.** 325.
- Worm Müller, J.** Om Tællingen af de røde Blodlegemer efter Malassez' Methode. **1.** 126.
- Om Forholdet mellem Blodlegemernes Antal og Blodets Farvekraft. **1.** 141.
- Om de eddikesure og myresure Kobbersaltes Ømfindtlighed som Reagenser paa Druesukker. **2.** 451.
- Om den normale Urins Forhold til eddikesurt og svovlsurt Kobberoxyd samt til Barfoeds Reagens. **2.** 463.
- Druesukkerets Titring i Menneskeurin. **3.** 45.
- Om Druesukkerets Forhold til Kobberoxyd. **3.** 293.
- Om Forbindelser af Druesukker med Kobberoxyd og Kali. **3.** 307.
- Druesukkerets Forhold til Kobberoxydhydrat. **5.** 1.
- Druesukkerets Forhold til Kobberoxydhydrat og Alkali. **5.** 10.
- Om Kobberoxydhydrats Reduktion ved Druesukker i neutral og eddikesur Vædske. **5.** 26.
- Om Kobberoxydhydratets Reduktion ved Druesukker i alkalisk Vædske. **5.** 34.
- Den Trommer'ske Proves Ømfindtlighed; Fehlings Vædske som kvalitativt Reagens paa Sukker. **5.** 55.
- Om Processen ved den Trommer'ske Prove. **5.** 74.
- Om Mangleterne ved de hidtil anvendte Apparater til Studiet af Hjertets Mekanik og Klappespil. **5.** 94.
- Studier over Hjertets Mekanik og Klappespil. **5.** 97.
- Kortere Meddelelser af fysiologisk-kemisk Indhold. **5.** 359.
- Om Papillarmusklerne's Funktion. **5.** 363.
- Øyen, P. A.** Nogle iagttagelser med hensyn til temperatur og struktur i Jotunheimens sne- og isbræer. **16.** 187.
- Temperaturiagttagelser i Jotunfjeldene sommeren 1892. **16.** 230.
- Pythæren. **17.** 2.
- Bidrag til det nordlige Norges geologi. **17.** 3.
- Nogle iagttagelser med hensyn til vandtemperaturen i Jotunheimens elve og indsoer. **17.** 10.
- Skilbotn. **18.** 4.
- Strandlinjer i Gudbrandsdalen. **18.** 5.
- Kontinentalglaciation og lokalnedisning. **21.** 7.

- Øyen, P. A. A glacial deposit near Christiania. **22.** 8.
 — Hoidemaalinger i Jotunheimen Sommeren 1902. **25.** 4.
 — Meteorologiske Iagttagelser i Jotunheimen Sommeren 1902. **25.** 5.

SAGREGISTER.

Anatomi, Histologi, Embryologi og Antropologi.

- Lappische Gräber-Schädel. (Heiberg, J.) **3.** 234.
 Om Nerveenderne i Iglens voluntære Muskler. (Hansen, G. A.) **6.** 460.
 Til Belysning af Cellernes Former. (Hennum, I. O.) **9.** 301.
 Benmarvens forhold i sygdomme og dens fysiologiske funktion. (Geelmuyden, H. Chr.) **11.** 1.
 Om sadelleden (peronarthrosis). (Hennum, I. O.) **11.** 369.
 Nerver i fåre-ovariet. (Vedeler.) **12.** 376.
 Nerver i Hummerens Ovarie. (Vedeler.) **14.** 94.
 Sur la scission des cellules organiques. (Chavkine, M. W.) **14.** 101.
 Bidrag til tarmkanalens histologi og physiologi hos torsken (*Gadus morhua*). (Thesen, J.) **14.** 220.

Astronomi og Astrofysik.

- Om Indflydelsen af Banens Excentricitet paa den Varmemængde, som et Himmellegeme modtager fra Solen. (Geelmuyden, H.) **1.** 438.
 Om Zodiakallyset. (Geelmuyden, H.) **3.** 258.
 Nordlyset den 17de Marts 1880. (Tromholt, S.) **6.** 369.
 Remarques sur la théorie de la lumière zodiacale. (Geelmuyden, H.) **7.** 55.
 Nogle magnetiske Observationer i Nordmarken og i Christiania. (Geelmuyden, H.) **19.** 10.

Bakteriologi.

- Kritiske bemærkninger om «sop paa klipfisk». (Brunchorst, J.) **13.** 98.
 «Sop paa klipfisk, den saakaldte mid.» Et tilsvær til hr. Brunchorst. (Johan-Olsen, O.) **13.** 104.
 Ueber Pöckelversuche mit Fischfleisch. (Schmidt-Nielsen, S.) **23.** 5.

Botanik.

- Voksesteder for nogle af den norske Floras Karplanter søndenfor Polar-kredsen. (Norman, I. M.) **5.** 229.
- Notationes summatis conceptæ observationum floræ arcticæ norvegiæ posteriore tempore effectarum, correctione addita latitudinis geographicae terminorum polarium prius indicatorum. (Norman, I. M.) **5.** 436.
- Om karplanternes udbredning i det nordenfj. Norge. (Norman, I. M.) **8.** 1.
- Blomsterplanterne i dansk Østgrønland. En plantegeografisk Studie. (Eberlin, P.) **12.** 325.
- Efterskrift til Afhandlingen: Blomsterplanterne i dansk Østgrønland. (Eberlin, P.) **12.** 384.
- Herbarium antiquum Danicum, carmine D. Oligeri Jacobæi adornatum. (Dahl, O.) **15.** 249.
- En gammel Trondhjems flora af Joachim Irgens. (Dahl, O.) **15.** 348.
- 16.** 1.
- Breve fra norske Botanikere til Prof. I. W. Hornemann. (Dahl, O.) **17.** 4.
- Undersøgelser over norske Ferskvandsdiatoméer. (Holmboe, I.) **22.** 1.
- Norske Ferskvandsdiatoméer. II. (Holmboe, I.) **23.** 2.

Fysik og Mekanik.

- Den koniske Pendelbevægelse. (Geelmuyden, H.) **5.** 307.
- Om den circulære polarisation og dens anvendelse til bestemmelse af organiske legemer. (Otto, J. G.) **12.** 158.
- En bemærkning om beregningen af en traads tværsnit ved elektriske modstandsbestemmelser. (Isaachsen, D.) **12.** 118.
- Om elektricitetsbevægelsen i Herz' primære leder. (Bjerknes, V.) **15.** 165.
- Om anvendelsen af mekanikens principer i fysiken. (Bjerknes, V.) **15.** 331.
- Beobachtungen am Pulkowaer Passageninstrument im ersten Vertikal in den Jahren 1890 und 1891, nebst Ableitung der Polhöhenänderung. (Wanach, B.) **16.** 65.
- Om Indsugning af Kathodestraaler mod en magnetisk Pol. (Birkeland, Kr.) **20.** 15.
- Eine Methode für die Intensitätsmessung von Röntgenstrahlen nebst einer Berechnung der Wellenlänge derselben. (Holtzmark, G.) **24.** 10.

Fysiologi, fysiologisk og pathologisk Kemi, experimentel Pathologi.

- Om Tællingen af de røde Blodlegemer efter Malassez' Methode. (Worm Müller, J.) **1.** 126.
- Om Forholdet mellem Blodlegemernes Antal og Blodets Farvekraft. (Worm Müller, J.) **1.** 141.
- Om de eddikesure og myresure Kobbersaltes Ømfindtlighed som Reagenser paa Druesukker. (Worm Müller, J.) **2.** 451.
- Om den normale Urins Forhold til eddikesurt og svovlsurt Kobberoxyd samt til Barfoeds Reagens. (Worm Müller, J.) **2.** 463.

- Druesukkerets Titring i Menneskeurin. (Worm Müller, J., og Hagen, I.) **3.** 45.
- Om Druesukkerets Forhold til Kobberoxyd. (Worm Müller, J., og Hagen, I.) **3.** 293.
- Om Forbindelser af Druesukker med Kobberoxyd og Kali. (Worm Müller, J., og Hagen, I.) **3.** 307.
- Druesukkerets Forhold til Kobberoxydhydrat. (Worm Müller, J., og Hagen, I.) **5.** 1.
- Druesukkerets Forhold til Kobberoxydhydrat og Alkali. (Worm Müller, J., og Hagen, I.) **5.** 10.
- Om Kobberoxydhydratets Reduktion ved Druesukker i neutral og eddikesur Vædske. (Worm Müller, J., og Hagen, I.) **5.** 26.
- Om Kobberoxydhydratets Reduktion ved Druesukker i alkalisk Vædske. (Worm Müller, J., og Hagen, I.) **5.** 34.
- Den Trommerske Prøves Ømfindtlighed; Fehlings Vædske som kvalitativt Reagens paa Sukker. (Worm Müller, J., og Hagen, I.) **5.** 55.
- Om Processen ved den Trommerske Prøve. (Worm Müller, J., og Hagen, I.) **5.** 74.
- Om Mangleterne ved de hidtil anvendte Apparater til Studiet af Hjertets Mekanik og Klappespil. (Worm Müller, J.) **5.** 94.
- Studier over Hjertets Mekanik og Klappespil. (Sandborg, C., og Worm Müller, J.) **5.** 97.
- Kortere Meddelelser af fysiologisk-kemisk Indhold. (Worm Müller, J., og Hagen, I.) **5.** 359.
- Om Papillarmuskulernes Funktion. (Sandborg, C., og Worm Müller, J.) **5.** 363.
- Bidrag til Kundsken om Æggehvidestoffernes Forandring ved Pankreasfermentet. (Otto, J. G.) **8.** 300.
- En legalundersøgelse med nogle bemærkninger. (Otto, J. G.) **10.** 1.
- Die neueren Untersuchungen über das Hämoglobin und das Methämoglobin. (Otto, J. G.) **10.** 296.
- Fysiologiske undersøgelser over alkohol, fuselolje og brændevin. (Otto, J. G.) **11.** 199.
- Om nogle dyriske stofvekselprodukter af den aromatiske gruppe. (Otto, J. G.) **12.** 126.
- En fremstilling af de metoder, som har været anvendte ved syntesen af naturligt forekommende organiske forbindelser. (Otto, J. G.) **12.** 140.
- Om Aceton som Stofvekselprodukt. (Geelmuyden, H. Chr.) **19.** 2.
- Om Acetonuri ved Phloridzinforgiftning. (Geelmuyden, H. Chr.) **20.** 14.
- Kemiske og fysiologiske Studier over Guanylsyren. (Bang, I.) **23.** 1.
- Undersøgelser over nogle Fladbrødsarters Sammensætning og Udnyttning i Organismen. (Torup, S., og Bøckman, P. W. K.) **24.** 3.
- Om kulhydrater i urinen ved sukkersyge hos børn. (Geelmuyden, H. Chr.) **24.** 9.

Geografi (fysisk og mathematisk), Jordmagnetisme, Hydrografi.

- Om Klormængden i Nordsøen, Atlanterhavet og Davisstrædet. (Heland, A.) **1.** 229.
- Bidrag til det nordlige Norges Orografi. (Pettersen, K.) **1.** 367.
- Risehulen ved Lavangsbotten. (Pettersen, K.) **1.** 456.

- Om Vandets Formindskelse paa Jordens Overflade. (Sexe, S. A.) **2.** 479.
 Lofoten og Vesteraalen. (Pettersen, K.) **5.** 369.
 Lofoten og Vesteraalen. Slutning. (Pettersen, K.) **6.** 81.
 Arktis. (Pettersen, K.) **6.** 465.
 Om Islands Jøkler og om Jøkelvelnes Vandmængde og Slamgehalt. (Helland, A.) **7.** 200.
 Hoidemaalinger fra Island. (Helland, A.) **7.** 233.
 Om den sandsynlige årsag til den periodiske ændring af havstrømmenes styrke. (Blytt, A.) **9.** 23.
 Vestfjorden og Salten. (Pettersen, K.) **11.** 377.
 Nordlysiagttagelserne i Trondhjem i tidsrummet 1878—1888. (Håkonsen Hansen, M. K.) **13.** 112.
 Den historiske Udvikling af Kjendskabet til Grønlands Indlandsis. (Eberlin, P.) **13.** 277.
 Nogle iagttagelser med hensyn til vandtemperaturen i Jotunheimens elve og indsøer. (Øyen, P. A.) **17.** 10.
 Seiches i norske Indsøer. (Holmsen, A.) **20.** 1.
 Dybden af Øieren. (Holmsen, A.) **25.** 7.

Geologi.

- Om nogle gamle Strandlinjer. (Sexe, S. A.) **1.** 1.
 Om de isfyldte Fjorde og de glaciale Dannelser i Nordgrønland. (Helland, A.) **1.** 59.
 Saltens Geologi. (Pettersen, K.) **1.** 211.
 Om Fjord- og Daldannelsen inden det nordlige Norge. (Pettersen, K.) **2.** 218.
 Om Fjord- og Daldannelsen inden det nordlige Norge. (Slutning.) (Pettersen, K.) **2.** 272.
 Om Indsøerne i Italien og Fjordene i Norge. (Helland, A.) **2.** 387.
 Om Moræner. (Sexe, S. A.) **2.** 469.
 Det nordlige Sveriges og Norges Geologi. (Pettersen, K.) **3.** 1.
 Om de i fast Berg udgravede Strandlinjer. (Pettersen, K.) **3.** 182.
 Om Skandinaviens vertikale Svingninger. (Sexe, S. A.) **3.** 241.
 Terrassedannelser og gamle Strandlinjer. (Pettersen, K.) **4.** 167.
 Om Kobolt og Nikkelertsernes Forekomst i Norge. (Helland, A.) **4.** 188.
 Om de glaciale Dannelser paa den nordeuropæiske Slette. (Helland, A.) **4.** 280.
 Et Afsnit af Playfairs Illustrationer til Huttons Theori om Jorden. (Helland, A.) **4.** 367.
 Om Glaciationen af Shetland og Orkney. (Helland, A.) **4.** 385.
 Norges Stigning, Strandlinjer, Terrasser. (Sexe, S. A.) **5.** 247.
 Om Reliefforandringer i isskuret Felt. (Sexe, S. A.) **6.** 168.
 Forsøg paa en geologisk Diskussion. (Helland, A.) **6.** 171.
 Alte Strandlinjen und glaciale Schlift-flächen im Strandgürtel. (Sexe, S. A.) **7.** 194.
 Bidrag til de norske kyststrogs geologi. (Pettersen, K.) **7.** 363.
 Spor efter Istiden i Chile. (Sundt, L.) **8.** 289.
 Bidrag til de norske kyststrogs geologi. III. (Pettersen, K.) **8.** 322.
 Studier over Islands petrografi og geologi. (Helland, A.) **9.** 69.
 De norske kyststrogs geologi. IV. (Pettersen, K.) **10.** 129.
 Om seter eller strandlinjer i store hoider over havet. (Hansen, A. M.) **10.** 329.

- Svenske geologer om indsjøerne. (Helland, A.) **10.** 414.
 Professor Blytts geologiske Tidsregning. (Helland, A.) **14.** 106.
 Til Forsvar for mit Forsøg paa en geologisk Tidsregning. (Blytt, A.) **14.** 196.
 Strandlinjestudier. (Hansen, A. M.) **14.** 254.
 Strandlinjestudier. (Slutning.) (Hansen, A. M.) **15.** 1.
 Tre Kapitler af et Arbejde om Livsbetingelsernes geologiske Udvikling. (Eberlin, P.) **15.** 237.
 Beretning om en Undersøgelse af Svartisen, foretagen i Somrene 1890 og 1891. (Rekstad, J.) **16.** 266.
 Pytbræen (et bidrag til Folgefjonnens geologi). (Øyen, P. A.) **17.** 2.
 Bidrag til det nordlige Norges geologi. (Øyen, P. A.) **17.** 3.
 Om «stranflaten». (Hansen, A. M.) **17.** 5.
 Lurfaldet i Guldalen i 1345. (Helland, A., og Steen, Helge.) **17.** 6.
 Bræbevægelsen i Gudbrandsdalen mod slutningen af istiden. (Rekstad, J.) **17.** 9.
 Skilbotn. (Øyen, P. A.) **18.** 4.
 Strandlinjer i Gudbrandsdalen. (Øyen, P. A.) **18.** 5.
 Merker efter istiden i det nordlige af Gudbrandsdalen. (Rekstad, J.) **18.** 6.
 Merker efter istiden i Gudbrandsdalen. II. (Rekstad, J.) **20.** 10.
 Kontinentalglaciation og lokalnedisning. (Øyen, P. A.) **21.** 7.
 A glacial deposit near Christiania. (Øyen, P. A.) **22.** 8.
 Høidemaalingen i Jotunheimen Sommeren 1902. (Øyen, P. A.) **25.** 4.

Kemi (uorganisk og organisk).

- Om de eddikesure og nyrasure Kobbersaltes Ømfindtlighed som Reagenser paa Druesukker. (Worm Müller, J.) **2.** 451.
 Om Druesukkerets Forhold til Kobberoxyd. (Worm Müller, J., og Hagen, I.) **3.** 293.
 Om Forbindelser af Druesukker med Kobberoxyd og Kali. (Worm Müller, J., og Hagen, I.) **3.** 307.
 Druesukkerets Forhold til Kobberoxydhydrat. (Worm Müller, J., og Hagen, I.) **5.** 1.
 Druesukkerets Forhold til Kobberoxydhydrat og Alkali. (Worm Müller, J., og Hagen, I.) **5.** 10.
 Om Kobberoxydhydratets Reduktion ved Druesukker i neutral og eddikesur Vædske. (Worm Müller, J., og Hagen, I.) **5.** 26.
 Om Kobberoxydhydratets Reduktion ved Druesukker i alkalisk Vædske. (Worm Müller, J., og Hagen, I.) **5.** 34.
 Om Bestemmelse af Alkoholstyrken i Vin ved Spektrometer. (Tornøe, H.) **22.** 7.
 Mindre meddelelser om guanlylsyren. (Bang, I.) **24.** 8.
 Studier over Nucleoproteider. (Bang, I.) **25.** 1.

Mathematik.

- Theorie der Transformationsgruppen. I. (Lie, S.) **1.** 19.
 Theorie der Transformationsgruppen. II. (Lie, S.) **1.** 152.

- Vervollständigung der Theorie der Berührungs-Transformationen. (Lie, S.) **1.** 194.
- Resumé einer neuen Integrations-Theorie. (Lie, S.) **1.** 335.
- Neue Integrationsmethode der Monge-Ampère'schen Gleichung. (Lie, S.) **2.** 1.
- Die Störungstheorie und die Berührungstransformationen. (Lie, S.) **2.** 129.
- Synthetisch-analytische Untersuchungen über Minimalflächen. (Lie, S.) **2.** 157.
- Theorie des Pfaff'schen Problems. I. (Lie, S.) **2.** 338.
- Petite contribution à la théorie de la surface Steinerienne. (Lie, S.) **3.** 84.
- Theorie der Transformationsgruppen. III. (Lie, S.) **3.** 93.
- Sätze über Minimalflächen. (Lie, S.) **3.** 166.
- Sätze über Minimalflächen. II. (Lie, S.) **3.** 224.
- Sätze über Minimalflächen. III. (Lie, S.) **3.** 340.
- Theorie der Transformationsgruppen. IV. (Lie, S.) **3.** 375.
- Hvorledes man undgaar de imaginære Størrelser. (Sexe, S. A.) **4.** 145.
- Theorie der Transformationsgruppen. V. (Lie, S.) **4.** 232.
- Bestimmung aller in eine algebraische developpable eingeschriebenen algebraischen Integralflächen der Differentialgleichung $s = 0$. (Lie, S.) **4.** 334.
- Zur Theorie der Flächen constanter Krümmung. (Lie, S.) **4.** 345.
- Weitere Untersuchungen über Minimalflächen. (Lie, S.) **4.** 477.
- Ueber Flächen, deren Krümmungsradien durch eine Relation verknüpft sind. (Lie, S.) **4.** 507.
- Zur Theorie der Flächen constanter Krümmung. III. (Lie, S.) **5.** 282.
- Zur Theorie der Flächen constanter Krümmung. IV. (Lie, S.) **5.** 328.
- Discussion der Differentialgleichung $\frac{d^2z}{dx dy} = F(z)$. (Lie, S.) **6.** 112.
- Ueber algebraische cykloidische Kurven. (Holst, E.) **6.** 126.
- Transformationstheorie der partiellen Differentialgleichung $s^2 - rt = \frac{(1+p^2+q^2)^2}{a^2}$. (Lie, S.) **6.** 153.
- Ueber die Integration durch bestimmte Integrale von einer Classe linearer partieller Differentialgleichungen. (Lie, S.) **6.** 328.
- Om en ny Methode for Løsning af trinomiske Ligninger af n 'te grad. (Åstrand, I. I.) **6.** 448.
- Zur Theorie der geodätischen Curven der Minimalflächen. (Lie, S.) **6.** 490.
- Ein Beitrag zur methodischen Behandlung der metrischen Eigenschaften algebraischer Kurven. (Holst, E.) **7.** 109.
- Skulde der ikke lade sig finde et reelt matematisk Udtryk, der kunde overtage de imaginære Størrelser Rolle eller gjøre samme Tjeneste som disse Størrelser? (Sexe, S. A.) **7.** 115.
- Bestimmung aller Flächen, die in mehrfacher Weise durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden. (Lie, S.) **7.** 155.
- Analytischer Beweis eines geometrischen Satzes. (Holst, E.) **7.** 177.
- Ueber Flächen, die infinitesimale und lineare Transformationen gestatten. (Lie, S.) **7.** 179.
- Ein Paar synthetische Methoden in der metrischen Geometri mit Anwendungen. (Holst, E.) **7.** 240.
- Ueber gewöhnliche Differentialgleichungen, die eine Gruppe von Transformationen gestatten. (Lie, S.) **7.** 443.

- Classification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen xy , die eine Gruppe von Transformationen gestatten. I—II. (Lie, S.) 8. 187.
- Classification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen xy , die eine Gruppe von Transformationen gestatten. III. (Lie, S.) 8. 371.
- Bestimmung des Bogenelements aller Flächen, deren geodätische Kreise eine infinitesimale Berührungstransformation gestatten. (Lie, S.) 9. 40.
- Ueber die allgemeinste geodätische Abbildung der geodätischen Kreise einer Fläche. (Lie, S.) 9. 62.
- Læren om de imaginære Størrelser betraget fra et elementært Standpunkt, samt om hvorledes man undgaar disse Størrelser. (Sexe, S. A.) 9. 205.
- Classification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen xy , die eine Gruppe von Transformationen gestatten. IV. (Lie, S.) 9. 431.
- Zur Theorie der Transformationsgruppen. (Lie, S.) 9. 449.
- Untersuchungen über Transformationsgruppen. I. (Lie, S.) 10. 74.
- Om størrelsesbegreberne areal og volum. (Thue, A.) 10. 181.
- Ueber die praktische Integration rationaler Bruchfunktionen. (Holst, E.) 10. 290.
- Et bidrag til den absolute geometri. (Thue, A.) 10. 304.
- Untersuchungen über Transformationsgruppen. II. (Lie, S.) 10. 353.
- Epaktberegning efter arithmetiske Formler. (Bonnevie, H.) 12. 102.
- Meddelelser fra det matematiske Seminar i Kristiania. (Palmstrøm, A.) 12. 357.
- Meddelelser fra det matematiske Seminar i Kristiania. (Palmstrøm, A.) 13. 127.
- Bemerkungen über die Integrationsmethoden der Zeitreduction in der Gyldén'schen Theorie. (Olsson, K. G.) 14. 1.
- Ueber die Convergenz der Annäherungen in der Gyldén'schen Störungstheorie. (Olsson, K. G.) 14. 232.
- Meddelelser fra det matematiske seminar i Kristiania. III. (Palmstrøm, A.) 14. 244.
- Bestimmung aller Untergruppen der projectiven Gruppe des linearen Complexes. (Knothe, E.) 15. 97.
- Sur un groupe simple à quatorze paramètres. (Engel, F.) 16. 322.
- Om uendelige rækker med reelle og positive led. (Sparre, K. E.) 16. 195.
- Mindre matematiske meddelelser. I. (Thue, A.) 16. 255.
- Ueber eine besondere Klasse von Translationsflächen. (Wiegner, G.) 16. 325.
- Die Flächen, der Haupttangentialkurven linearen Complexen angehören. (Peter, A.) 17. 8.
- Om Direktionens analytiske Betegning. (Wessel, C.) Med en Fortale af Sophus Lie. 18. 1.
- Sur l'application de la théorie des nombres entiers complexes à la solution en nombres rationnels $x_1x_2 \dots x_n, c_1c_2 \dots c_n, k$ de l'équation $c_1 \arctg x_1 + c_2 \arctg x_2 + \dots + c_n \arctg x_n = k \frac{\pi}{4}$. (Størmer, C.) 19. 3.
- Mindre matematiske meddelelser. II. (Thue, A.) 19. 4.

- Sur quelques formes de l'équation de laquelle dépend la division des périodes des fonctions elliptiques par 7. (Palmstrøm, A.) **19.** 5.
- Geometry on the Cubic Scroll of the First Knid. (Ferry, F. C.) **21.** 3.
- Ueber partielle Differentialgleichungen vierter Ordnung die eine intermediäres Integral besitzen. (Stephansen, M. A. E.) **24.** 4.
- Une application de théorème de Tchebycheff. (Størmer, C.) **24.** 5.
- Mindre mathematiske meddelelser. III. (Thue, A.) **25.** 3.
- Von der Bewegung eines Continuums mit einem Ruhepunkte. (Stephansen, M. A. Elisabeth.) **25.** 6.
- Et par theoremer om legemers opstykning i de samme dele. (Thue, A.) **25.** 10.
- Sur certaines équations aux différences. (Guldberg, A.) **25.** 11.

Meteorologi.

- Hvorfor blæser det ikke bestandigt fra Øst i det saakaldte stille Bælte? (Sexe, S. A.) **1.** 203.
- Jordskjælvne paa Ischia. (Helland, A.) **9.** 1.
- Nogle iagttagelser med hensyn til temperatur og struktur i Jotunheimens sne- og isbræer. (Øyen, P. A.) **16.** 187.
- Temperaturiagttagelser i Jotunfjeldene Sommeren 1892. (Øyen, P. A.) **16.** 230.
- Meteorologiske Iagttagelser i Jotunheimen Sommeren 1902. (Øyen, P. A.) **25.** 5.

Mineralogi.

- Om Hytteproduktet, Sten. (Münster, E.) **1.** 239.
- Om Kogsaltkrystaller og flydende Kulsyre i et og samme Hulrum i Kvarts fra en Pegmatitgang. (Helland, A.) **2.** 445.
- Studier over Konglomerater. (Helland, A.) **6.** 1.
- Norske ertsforekomster. I. Jernertser m. m. ved yngre granit og syenit. II. Ertssforekomster ved grønstengange. (Vogt, J. H. L.) **9.** 231.
- Norske ertsforekomster. III. Om den Thelemark-Sætersdalske ertsformation. IV. De solvetsførende gange ved Svenningdalen (Vefsen). (Vogt, J. H. L.) **10.** 16.
- Kongsberg sølvværks drift før og nu. (Helland, A.) **10.** 189.
- Norske ertsforekomster. V. Titanjernforekomsterne i noritfeltet ved Ekerund—Soggendal. VI. Varaldsøens kiskelt. Tillæg til III. Den Thelemark-Sætersdalske ertsformation. (Vogt, J. H. L.) **12.** 1.
- Beiträge zur Kenntniss der Gesetze der Mineralbildung in Schmelzmassen und in den neovulkanischen Ergussgesteinen (jüngeren Eruptivgesteinen). (Vogt, J. H. L.) **13.** 1.
- Norske ertsforekomster. VII. Foldalens kiskelt. (Vogt, J. H. L.) **13.** 202.
- Kjernerøstning af nikkelholdig magnetkis. (Riiber, C.) **13.** 271.
- Beiträge zur Kenntniss der Gesetze der Mineralbildung in Schmelzmassen und in den neovulkanischen Ergussgesteinen (jüngeren Eruptivgesteinen). (Vogt, J. H. L.) **13.** 310.

- Beiträge zur Kenntniss der Gesetze der Mineralbildung in Schmelzmassen und in den neovulkanischen Ergussgesteinen (jüngeren Eruptivgesteinen). (Vogt, J. H. L.) **14.** 11.
- Garnierit (Nikkelgymnit) fra Foldalen. (Münster, Chr. A.) **14.** 240.
- Ældre og nyere lagttagelser om Sølvforekomster i Kongsbergfjeldet. (Hansteen, H.) **22.** 2.

Nekrologer og Biografier.

- Udkast til en Autobiografi af Justitsraad Kristopher Hammer. (Belsheim, J.) **9.** 428.
- Sophus Lie med Lies Billede og en Fortegnelse over hans videnskabelige Arbejder. (Syllow, L.) **21.** 1.

Psychologi.

- Om sandsynlighed og dens betydning logisk betragtet. (Aal, A.) **19.** 9.
- Zur Biogenese der spontan erregten Empfindungen. (Aars, Kr. B.-R.) **22.** 4.

Zoologi.

- Nye Bidrag til Kundskaben om Middelhavets Invertebratfauna. I. Middelhavets Mysider. (Sars, G. O.) **2.** 10.
- Beskrivelse over nye Arter henhørende til Slægten Solenopus, samt nogle Oplysninger om dens Organisation. (Koren, J., og Danielsen, D. C.) **2.** 120.
- Tungebeväbningen hos de norske Rhipidoglossa. (Friele, H.) **2.** 299.
- Prodromus descriptionis crustaceorum et pycnogonidarum quæ in expeditione norvegica anno 1876 observavit. (Sars, G. O.) **2.** 237.
- The development of the skeleton in the genus Waldheimia. (Friele, H.) **2.** 380.
- Oversigt over de norske Serpula-Arter. (Hansen, G. A.) **3.** 39.
- Cidaria dilutata W. V. (Schøyen, W. M.) **3.** 177.
- Underslægten Lanius med særligt Hensyn paa dens norske Arter. (Stejneger, L.) **3.** 323.
- Anatomic von Leanira tetragona. (Hansen, G. A.) **3.** 352.
- Nye Bidrag til Kundskaben om Middelhavets Invertebratfauna. II. Middelhavets Cumaceer. (Sars, G. O.) **3.** 465.
- Nye Bidrag til Kundskaben om Middelhavets Invertebratfauna. II. Middelhavets Cumaceer. (Sars, G. O.) **4.** 1.
- Nogle Bemærkninger i Anledning af Hr. Cand. L. Stejnegers Afhandling «Underslægten Lanius». (Collett, R.) **4.** 180.
- Fremdeles om Underslægten Lanius og dens norske Arter. (Stejneger, L.) **4.** 262.
- Bemærkninger til Hr. Stejnegers Gjensvar. (Collett, R.) **4.** 271.
- Crustacea et Pycnogonida nova in itinere 2do et 3tio expeditionis norvegicæ anno 1877 et 1878 collecta. (Sars, G. O.) **4.** 427.
- Oversigt over de i Norges arktiske Region hidtil fundne Lepidoptera. (Schøyen, W. M.) **5.** 119.

- Er *Lanius excubitor* L. og *Lanius major* Pall. distinkte eller ei? (Stejneger, L.) **5.** 274.
- En Bemærkning til Hr. Stejnegers Gjensvar Pag. 274. (Collett, R.) **5.** 368.
- Revision af Gruppen Isopoda chelifera med Charakteristik af nye herhen hørende Arter og Slægter. (Sars, G. O.) **7.** 1.
- Bidrag til Kundskaben om Decapodernes Forvandlinger. I. (Sars, G. O.) **9.** 155.
- Syv Breve fra Præsten Hans Strøm til Biskop Gunnerus. (Belsheim, J.) **9.** 405.
- Nye Bidrag til Kundskaben om Middelhavets Invertebratfauna. III. Middelhavets Saxisopoder (Isopoda chelifera). (Sars, G. O.) **11.** 263.
- Nye Bidrag til Kundskaben om Middelhavets Invertebratfauna. IV. Ostracoda mediterranea. (Sars, G. O.) **12.** 173.
- Pycnogonidea borealia et arctica. (Sars, G. O.) **12.** 339.
- Bidrag til Kundskaben om Decapodernes Forvandlinger. II. (Sars, G. O.) **13.** 133.
- Bidrag til Kundskaben om Decapodernes Forvandlinger. III. Familien Crangonidæ. (Sars, G. O.) **14.** 132.
- Om *Lanius excubitor* og dens forskjellige Formers Optræden i Norge. (Collett, R.) **16.** 50.
- Undersøgelser over Annulata Polychaeta omkring Hardangerfjordens Udløb Sommeren 1893. (Bidenkap, O.) **17.** 1.
- Descriptions of some Australian Phyllopoda. (Sars, G. O.) **17.** 7.
- Development of *Estheria* Packardii. (Sars, G. O.) **18.** 2.
- On Fresh-water Entomostraca. (Sars, G. O.) **18.** 3.
- On *Stenocypris* Chevreuxi. (Sars, G. O.) **18.** 7.
- Description of two new Phyllopoda. (Sars, G. O.) **18.** 8.
- On some West-Australian Entomostraca raised from dried sand. (Sars, G. O.) **19.** 1.
- Synotus barbastellus* (Schreb.), *Phoca foetida* Müll., nye for Norges Fauna. (Collett, R.) **19.** 6.
- Om en Samling af Fiske fra Azorene, tilhørende Musæet i Ponta Delgada. (Collett, R.) **19.** 7.
- Om en Del for Norges Fauna nye Fiske fundne i 1880—1896. (Collett, R.) **19.** 8.
- Bidrag til kundskaben om Norges hydrachnider. I. (Thor, S.) **19.** 11.
- Ein neuer Bandwurm (*Monorygma Chlamydoselachi* n. sp.) aus *Chlamydoselachus anguineus* Garmann. (Lønnberg, E.) **20.** 2.
- Andet bidrag til kundskaben om Norges hydrachnider. (Thor, S.) **20.** 3.
- On some South-African Phyllopoda raised from dried mud. (Sars, G. O.) **20.** 4.
- Capobates Sarsi*, en ny hydrachnide fra Kap, Syd-Africa. (Thor, S.) **20.** 5.
- Description of two additional South-African Phyllopoda. (Sars, G. O.) **20.** 6.
- Huitfeldta, en ny hydrachnide-slægt fra Søndfjord, Norge. (Thor, S.) **20.** 7.
- On *Megalocypris Princeps*, a gigantic fresh-water Ostracod from South-Africa. (Sars, G. O.) **20.** 8.
- Beiträge zur Anatomie und Histologie von *Ulocyathus arcticus*, *Cariophyllia Smithii*, *Dendrophyllia ramia* und *Cladocora cespitosa*. (Arnesen, E.) **20.** 9.
- On the propagation and early development of Euphausiidæ. (Sars, G. O.) **20.** 11.

- Nye hydrachnideformer fundne i Norge sommeren 1898. (Thor, S.) **20.** 12.
- Ljania, en ny hydrachnide-slægt fra omegnen af Kristiania. (Thor, S.) **20.** 13.
- On the genus *Broteas* of Lovén with description of the type species *Broteas falcifer* Lov. (Sars, G. O.) **21.** 2.
- Additional notes on the South-African Phyllopoda. (Sars, G. O.) **21.** 4.
- Norges hydrachnider. III. (Thor, S.) **21.** 5.
- Beretning om araneologiske Undersøgelser i Hallingdal Sommeren 1898. (Strand, E.) **21.** 6.
- Om nogle Staphylinider og Phytophage Hymenoptera. (Strand, E.) **22.** 3.
- Lepidopterologiske Undersøgelser særligt i Nordlands Amt. (Strand, E.) **22.** 5.
- Description of *Iheringula Paulensis*, a new generic type of Macrothricidæ from Brazil. (Sars, G. O.) **22.** 6.
- On some Indian Phyllopoda. (Sars, G. O.) **22.** 9.
- South American Entomostraca. I. (Sars, G. O.) **23.** 3.
- Norges hydrachnider. IV. (Thor, S.) **23.** 4.
- Orthoptera og Hymenoptera samlede i 1900. (Strand, E.) **23.** 6.
- Om fem for Norges Fauna nye Fiske (1871—1900). (Collett, R.) **23.** 7.
- Contributions to the knowledge of the fresh-water Entomostraca of South-America as shown by artificial hatching from dried material. II. (Sars, G. O.) **24.** 1.
- Theridiiden aus dem nördlichen Norwegen. (Strand, E.) **24.** 2.
- On a new South American Phyllopod, *Eulimnadia Brasiliensis*, G. O. Sars, raised from dried mud. (Sars, G. O.) **24.** 6.
- Depressaria arctica* Strand, n. sp. (Strand, E.) **24.** 7.
- Om tre for Norges Fauna nye Fiske. (Collett, R.) **25.** 2.
- Fresh-water Entomostraca from China and Sumatra. (Sars, G. O.) **25.** 8.
- Neue norwegische Schmetterlingsformen. (Strand, E.) **25.** 9.

Bind XXV. Hefte 4.

Indhold.

- No. 10. **Axel Thue:** Et par theoremer om legemers op-
stykning i de samme dele Side 1—39
» 11. **Alf Guldberg:** Sur certaines équations aux diffé-
rences..... » 1—11

Generalregister (Forfatterregister—Sagregister) Bind I—XXV.

«Archiv for Mathematik og Naturvidenskab» udkommer
med 1 Bind (4 Hefter) aarlig.

Subskriptionsprisen er Kr. 8.00 pr. Bind.

Alb. Cammermeyers Forlag.

3 2044 106 231 277

